Satser om kontinuerliga funktioner

Vi nöjer oss med det tvådimensionella fallet. Den allmänna principen borde vara klar av detta fall.

Anta således att Ω är ett kompakt delområde av $\mathbf{R}^2$. Låt $f = f(x,y)$ vara en kontinuerlig funktion från Ω till $\mathbf{R}$.

SATS 1 *f är begränsad*

Bevis. Vi visar "uppåt begränsad". "Nedåt begränsad" visas på samma sätt. Vi antar att f är uppåt obegränsad och härleder ur detta antagande en motsägelse.

Vi låter R vara en axelparallell kvadrat som innehåller Ω. Vi delar R i fyra lika delar. (Vi kan atta att dessa är slutna och alltså har delvis gemensamma randpunkter). I minst en av dem, som vi kallar R_1, är f obegränsad. Vi finner en punkt (x_1, y_1) i R_1, med $f(x_1, y_1) \geq 1$.

Därpå delar vi R_1 i fyra lika delar. I minst en av dessa fyra delar är f återigen obegränsad. Vi kallar denna fjärdedel för R_2 och finner där en punkt (x_2, y_2) med $f(x_2, y_2) \geq 2$.

Förfarandet upprepas i det oändliga. Vi konstruerar alltså en svit av kvadrater $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \ldots$, där varje kvadrat är en fjärdedel av den föregående. I kvadraten R_n finner vi en punkt (x_n, y_n) med $f(x_n, y_n) \geq n$

Nu bildar kvadraternas vänstra kanter en stigande följd av x–värden, och deras högra kanter en avtagande följd. Dessa båda sviter är begränsade och monotona och har alltså varsitt gränsvärde. Eftersom avståndet mellan vänster- och högerkant går mot noll måste detta gränsvärde vara samma, kalla det x_0. Vi har då givetvis även $x_n \to x_0$ då $n \to +\infty$, enligt instängningsprincipen.

På samma sätt gäller att det finns ett y_0 sådant att. $y_n \to y_0$ då $n \to +\infty$.

Vi har alltså $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$ där gränspunkten tillhör Ω eftersom Ω är slutet. Kontinuitet ger $f(x_n, y_n) \to f(x_0, y_0)$. Men det är orimligt eftersom vänsterledet går mot plus oändligheten. Detta fullbordar beviset.

SATS 2 *f antager ett största och ett minsta värde.*

Bevis. Vi nöjer oss med "största". Det är en grundläggande egenskap hos reeella tal att varje uppåt begränsad mängd har en *minsta* övre begränsning. f:s värdemängd $f(\Omega)$ är enligt föregående sats begränsad. Lå t M vara den minsta övre begränsningen av $f(\Omega)$. Om inget största värde antages så tillhör M inte värdemängden.

Det innebär att $f(x,y) < M$ för alla $(x,y) \in \Omega$. Funktionen $g(x,y) = 1/(M - f(x,y))$ är alltså kontinuerlig (den är ett genom en kontinuerlig funktion utan nollställen). Men eftersom M är en *minsta* övre begränsning så antager f värden godtyckligt nära M. Det innebär att $g(x,y)$ är obegränsad, i strid med föregående sats.

Denna motsägelse kommer ur antagandet att inget största värde antages. Vi antog fel, f antager verkligen ett största värde.

En sista kontinuitetssats som inte verkar formuleras alls i boken, men som verkligen används, är följande:

SATS 3 *Nivåkurvor till kontinuerliga funktioner är slutna*

Vi tänker oss här att f är en kontinuerlig funktion $f : \Omega \to \mathbf{R}$ där Ω är sluten.

Bevis. Låt kurvan ifråga vara $f(x, y) = C$. Vi använder följande ekvivalenta omformulering av begreppet "sluten": "En mängd D i $\mathbf{R}^2$ är sluten $\iff$ varje konvergent punktföljd $(x_n, y_n), n = 1, 2, \ldots$ i D har sitt limes i D." Vi har redan använt $\to$ och behöver nu omvändningen vars bevis vi annyder.

Om D *inte* är sluten finns en randpunkt (x_0, y_0) som inte tillhör D. I varje omgivning av denna punkt finns punkter som tillhör D. I en cirkelskiva med radie $1/n$ finner vi alltså en punkt (x_n, y_n) som tillhör D. Vi hittar därmed en konvergent följd i D men med gränspunkt utanför. Detta är kontrapositiven till den önskade implikationen.

Låt alltså $(x_n, y_n), n = 1, 2, 3, \ldots$ vara en konvergent följd på kurvan, med gränspunkt (x_0, y_0). Det gäller $f(x_n, y_n) = C$ Låter vi n gå mot oändligheten erhåller vi omedelbart $f(x_0, y_0) = C$, dvs. (x_0, y_0) tillhör kurvan $f(x, y) = C$.

På samma sätt visas att områdena $f(x, y) \geq C$ och $f(x, y) \leq C$ är slutna. Deras komplement, givna av olikheterna $f(x, y) < C$, $f(x, y) > C$ är alltså öppna.

Intresantast för oss är att skärningen av någon av de angivna mängderna med en enkelt beskriven kompakt mängd, t ex en cirkelskiva, är sluten och således även kompakt. Det är så vi nästan alltid beskriver kompakta mängder.

Snipp, snapp, snut !