Generaliserade multipelintegraler. Komplement till Arne P.

Ju fler dimensioner, desto fler sätt kan integralerna konstra. Området kan vara obegränsat, t ex hela planet eller första kvadranten.

Integranden kan vara obegränsad nära en enda punkt, t ex $1/(x^2+y^2)$ är obegränsad nära origo. Den kan också vara obegränsad i närheten av en hel kurva. Detta gäller t ex $1/|x^2-y|^{1/2}$, som är obegränsad nära parabeln $x^2=y$.

Teorin för generaliserade integraler måste föras i steg. Först behandlas positiv integrand. Som vanligt betyder "positiv" i konvergenssammanhang "icke-negativ". Integralen definieras som en minsta övre begränsning för integraler tagna över lämpliga begränsade mätbara områden. Man visar att det räcker att beräkna integralen över en lämplig växande svit av områden och sedan ta gränsvärdet av den så erhållna växande talsviten.

En svit av områden indiceras med positiva heltal. Det är ibland mer praktiskt att tillåta områden indicerade med en *kontinuerlig* variabel, t ex kan det vara naturligt att tömma ut planet med cirklarna $x^2+y^2 \leq R^2$, där R är ett godtyckligt icke-negativt reellt tal. Då talar vi om en "uttömmande familj" av områden.

Därpå behandlas integrander med växlande tecken. Konvergens definieras i detta fall som absolutkonvergens. Är inte integralen av funktionens belopp konvergent finns inget meningsfullt sätt att definiera en generaliserad integral. Olika sviter av områden kommer garanterat att producera olika resultat.

Allra sist borde komplexvärd integrand behandlas vilket boken inte gör.

Jag kommer att föra diskussionen huvudsakligen för obegränsade områden. En alternativ framställning av teorin, jämfört med Arne P, visar sig leda till enklare beräkningar. Priset för detta är en svårare teori.

Positiv integrand, obegränsat område.

Definition

Låt Ω vara ett obegränsat område i $\mathbf{R}^2$. Låt $f=f(x,y)$ vara en positiv kontinuerlig funktion på Ω. Vi definierar

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

som supremum av alla integraler

$$\int\int_{D} f(x,y)dxdy$$

där D är ett godtyckligt begränsat, mätbart, delområde av Ω, om detta existerar. Eljes, dvs. om (tal)mängden av sådana integraler är obegränsad, sätter vi integralen $=+\infty$. Vi använder, som tidigare, uttrycken **konvergent** för det första fallet, **divergent** för det andra.

Det är nog bäst att påminna om betydelsen av "supremum", minsta övre begränsning. En mängd av (positiva) reella tal är antingen uppåt begränsad eller uppåt obegränsad. I det förra fallet finns en sats (eller ett axiom, beroende på hur teorin läggs upp) som säger att mängden har en *minsta* övre begränsning. Denna kan tillhöra eller icke tillhöra mängden.

Är t ex mängden bildad ur en strikt växande konvergent talföljd, t ex $a_n = 1-1/n$, fås ett supremum som inte tillhör mängden, i detta fall följdens gränsvärde, som är $=1$. Vi kan nå detta värde godtyckligt nära underifrån, men det antages aldrig.. Till godtyckligt positivt ϵ finns ett n sådant att $1 > a_n = 1-1/n > 1-\epsilon$. (ta $n > 1/\epsilon$)

Ett annat exempel är omkretsen av alla konvexa polygoner som kan inskrivas i en cirkel med radie R. Supremum är $2\pi R$, dvs. cirkelns omkrets. I vissa framställningar är detta slags supremum själva definitionen av båglängd.

Ingen polygon har denna omkrets. Till en given polygon kan vi alltid hitta en med större omkrets, genom att lägga till ett extra hörn. Genom att utgå från en kvadrat och sedan skapa nya regelbundna månghörningar, med ständigt fördubblat antal hörn, får vi en strikt växande talsvit som närmar sig $2\pi R$ underifrån. Talen i sviten antar aldrig detta värde, men kommer godtyckligt nära.

Vi ger nu raskt ett enkelt exempel på definitionen ovan.

Exempel

Vi beräknar integralen

$$\iint_{x,y\geq 0} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

Integranden är positiv och området är första kvadranten. Ett godtyckligt mätbart begränsat område D omsluts av någon kvadrat Ω_N med hörn i punkterna $(0,0),(N,0),(0,N),(N,N)$. Eftersom integranden är positiv är integralen över Ω_N större än den över D.

Supremum över dessa kvadrater enbart måste därför vara minst lika med det önskade värdet. Men också högst lika med detta, eftersom kvadraterna själva hör till de tillåtna områdena.

Och integralerna över Ω_N bildar förstås en växande talsvit vars gränsvärde därmed är det önskade supremum.

Den efterfrågade integralen är alltså

$$\lim_{N\to+\infty} \iint \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \lim_{N\to+\infty} \int_0^N \frac{dx}{1+x^2} \int_0^N \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi^2}{4}$$

Våra kvadrater bildar en **uttömmande svit** i Arne P:s mening. De “växer förbi varje kompakt”.

Följande exempel belyser vitsen med att kunna välja svit. Vidare syns varför olika sviter ger samma resultat, vid positiv integrand.

Exempel

Vi gör Arne P:s exempel 20, avsnitt 6.6, lite noggrannare. Vi vill beräkna integralen

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \lim_{R\to+\infty} \int_0^R e^{-x^2}dx = \lim_{R\to+\infty} I_R$$

där det denna gång är bekvämast att låta R vara en kontinuerlig variabel.

Tricket är att integrera den positiva funktionen

$$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$$

över första kvadranten på två olika sätt. Vi kan integrera över antingen kvartscirklar $x^2+y^2=R^2, R\to+\infty$ eller över kvadrater $0\leq x,y\leq R$. Ur en egen figur ser du att cirkeln med radie R är innehållen i kvadraten med sida R, som i sin tur ligger inuti cirkeln med radie $\sqrt{2}\cdot R$. Eftersom integranden är positiv får vi motsvarande olikhet mellan integraler:

$$\iint_{x^2+y^2\leq R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy \leq \int_0^R e^{-x^2}dx \int_0^R e^{-y^2}dy \leq \iint_{x^2+y^2\leq 2R^2} e^{-x^2-y^2}dxdy$$

Den mellersta integralen är I_R^2. I ytterleden inför vi polära koordinater,

$$x = \rho\cos\varphi$$

$$y = \rho\sin\varphi$$

med Jacobianan ρ, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ Integranden blir nu $\rho e^{-\rho^2}$ vars primitiv med avseende på ρ är

$$-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}$$

Gränserna för φ blir förstås $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Vi erhåller olikheterna

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}(1 - e^{-R^2}) \leq I_R^2 \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}(1 - e^{-2R^2})$$

Dessa olikheter belyser att de båda uttömande familjerna "växer förbi varandra". Till varje kvadrat finns en större kvartscirkel, till varje kvartscirkel finns en större kvadrat. Sviterna måste därmed ge samma limes, enligt instängningsprincipen. Vi erhåller, då $R \to +\infty$

$$\frac{\pi}{4} \leq I^2 \leq \frac{\pi}{4}$$

Man kan nu också relativt enkelt uppskatta det fel man begår om man byter plus oändligheten mot R i integralens övre gräns. Redan olikheten $e^{+R^2} \geq 1 + R^2$ ger hyfsat goda besked om den saken.

Konvergenskriterier.

För generaliserade integraler, med positiv integrand, kan man formulera jämförelsekriterier liknande dem för enkelintegraler. Vi litar helst till *olikhetsjämförelse*, "överkattning med konvergent ger konvergent" samt "underskattning med divergent ger divergent".

Från optimeringsproblem på icke-kompakta områden vet du att gränsvärden i oändligheten kan vara rätt svårfångade varelser. Jag avstår därför från att formulera en flerdimensionell motsvarighet till kvotjämförelse.

Att hitta jämförelseobjekt kan vara en subtil konst. Vi exemplifierar detta.

Exempel

Är integralen

$$\int\int_{x,y\geq 0} \frac{1}{e^x + e^y}$$

över första kvadranten konvergent?

Integranden är positiv. Nämnaren är aldrig noll. Så allt intressant händer "i oändligheten". Här är det frestande att underskatta exponentialerna med "tillräckligt höga potenser" av x och y för "stora värden". Cruxet är att utanför en stor kvartscirkel, eller stor kvadrat, eller stor triangel, ja, stor vadsomhelst, finns punkter där x eller y inte alls är stora utan tvärtom kan bli lika med noll. Hur stor kompakt vi än avgränsar måste ju axlarna sticka ut utanför den.

Hur löser vi det? Om vi t ex avgränsar samma kvadrat som i det förra exemplet så ser vi att där x är nära noll (dvs. nära y–axeln) i en punkt utanför är i gengäld y stor. Och tvärtom. Det faller sig rätt naturligt att dela upp området i två hälfter, en där $x > y$, en där $y > x$.

Vi ser på samma kvadrater Ω_N som nyss. Vi delar dem i två hälfter, trianglarna Ω_N' och Ω_N''. Den första ges av $N \geq x \geq y \geq 0$, den andra av $N \geq y \geq x \geq 0$.

I Ω_N' underskattar vi $e^x + e^y$ med den större av de båda exponentialerna, e^x. Vi erhåller ur *underskattningen*

$$e^x + e^y \geq e^x$$

en överskattning,

$$\frac{1}{e^x + e^y} \leq e^{-x}$$

Integralen av e^{-x} över Ω'_N är, med integration i y–led först (rita figur!)

$$\int_0^N (\int_0^x e^{-x} dy) dx = \int_0^N xe^{-x} dx$$

En primitiv till xe^{-x} beräknas, efter partialintegration, till $-(x+1)e^{-x}$. Insättning av gränserna ger resultatet $1-(N+1)e^{-N}$ som har gränsvärdet 1 i oändligheten. Jämförelseintegralen är konvergent. Således är vår givna integral det också.

Undersökningen av den andra delintegralen förlöper exakt likadant, utom att x och y byter roll hela vägen. Därmed är konvergensen av vår givna integral visad.

Övning: Visa, medels Taylor (vilken restterm?) att $e^x+e^y \geq 1+\frac{1}{24}(x^4+y^4) \geq 1+\frac{1}{48}(x^2+y^2)^2$. Ge sedan ett nytt konvergensbevis för det sista exemplet. Det är väsentligt (som vanligt) med en riktningsoberoende upskattning, därav det sista ledet.

Växlande tecken

Om integranden växlar tecken är det inte säkert att olika uttömmande sviter ger samma resultat. Det är då förstås meningslöst att definiera den generaliserade integralen. Det går inte ens att för enkla områden, t ex planet eller första kvadranten, ange något slags kanonisk svit vars resultat ska favoriseras. En sådan angivelse skulle ändå inte klara av exempelvis ett variabelbyte.

I Arne P, sid. 247, definieras funktionen f:s positiva och negativa delar. Om integralen av f:s absolutbelopp är konvergent så är integralerna av positiva och negativa delen var för sig konvergenta. Det visar sig då naturligt att definiera interalen av f som skillnaden mellan dessa båda integraler, se Arne P. Den kan då beräknas över godtycklig uttömmande svit eller familj. Det innebär att beräkningen måste föregås av ett *konvergensbevis*, t ex via en lämplig överskattning av integranden. Att detta är väsentligt framgår av följande

Exempel:

"Studera integralen

$$\int\int \frac{(x-y)dxdy}{(1+x+y)^3}$$

över första kvadranten"

Vi prövar två olika uttömmande sviter. Den enklaste utgöres av de kvadrater vi redan betraktat, $0 \leq x, y \leq N$. Integralen över varje sådan kvadrat är emellertid lika med noll!

Vi visar det inte genom en beräkning, utan genom ett symmetriresonemang. Om vi speglar punkten (x, y) i linjen $x = y$, dvs. byter x och y mot varandra, byter täljaren i integranden tecken, medan nämnaren förblir oförändrad. Samtidigt är kvadraten symmetrisk kring linjen. Det positiva bidraget från triangeln under linjen tas därför ut exakt av det negativa bidraget från den övre triangeln. Det totala resulatet är alltså noll.

Nu prövar vi istället en svit bestående av rektanglar, $0 \leq x \leq 2N$; $0 \leq y \leq N$. Först integrerar vi i y–led, efter en omskrivning (i själva verket en partialbråksuppdelning)

$$\int_0^N \frac{x-y}{(1+x+y)^3} dy = \int_0^N \frac{2x+1-(1+x+y)}{(1+x+y)^3} dy = \int_0^N \Big[\frac{2x+1}{(1+x+y)^3} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\Big] dy$$

$$= \Big[\frac{-1}{2}\frac{2x+1}{(1+x+y)^2} + \frac{1}{1+x+y}\Big]_{y=0}^{y=N}$$

$$= \frac{1}{1+x+N} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{(1+x+N)^2} + \frac{1}{2}\frac{2x+1}{(1+x)^2}$$

Räkningarna förenklas nu om vi slår ihop den första och tredje termen till

$$g(x) = \frac{1+x+N-x-\frac{1}{2}}{(1+x+N)^2} = \frac{N+\frac{1}{2}}{(1+x+N)^2}$$

samt andra och fjärde termen till

$$h(x) = \frac{\frac{1}{2}(2x+1)-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$$

Integralen av $g(x)$ är

$$-\Big[\frac{N+\frac{1}{2}}{(1+x+N)}\Big]_{x=0}^{x=2N} = (N+\frac{1}{2})(\frac{1}{1+N} - \frac{1}{1+3N})$$

som går mot $2/3$ när N går mot $+\infty$.

Integralen av $h(X)$ är

$$\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{x+1}\Big]_{x=0}^{x=2N} = \frac{1}{2}(\frac{1}{2N+1} - 1)$$

som går mot -1/2 då $N \to +\infty$.

Totalt erhåller vi gränsvärdet

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \neq 0$$

Att vi får olika gränsvärden för två olika uttömmande sviter måste enligt bokens teori bero på att integralen av absolutbeloppet inte är konvergent.

Övning 1. Du inviteras att visa detta, som en räkneövning. Det räcker då att studera integralen tagen över det åttondelsplan (=halva kvadrant) där $x \geq 0$. Lämplig svit består förstås av trianglar.

Övning 2. Betrakta området $x \geq 0; |y| \leq 1$ och integralen av funktionen $f(x,y) = y$ över detsamma. Töm ut bandet med trapetser begränsade av y–axeln, samt linjerna $y = \pm 1$, $y = cx + N$, där c är konstant, $\neq 0$.

Visa att, och hur, gränsvärdet över en sådan uttömmande svit beror på lutningen c.

Övning 3 Visa att integralen

$$\int\int \frac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}},$$

tagen över hela planet, är divergent. Ange en uttömmande svit som ger gränsvärdet noll. Ange någon som ger ett positivt värde. Sviterna bör gå att räkna på och den andra *får* se fånig ut.

Måttsvillkoret

*

Vi övergår nu till att diskutera en integral där ovanstående defintion av uttömmande svit inte är så ändamålsenlig. Den vidare defintion som föreslås är förmodligen svårare att förstå men leder ofta till enklare beräkningar. Det krävs lite epsilon-känsla, eftersom denna bokstav verkar ofrånkomlig.

Vi undersöker denna gång integralen

$$\int\int_{x,y\geq 0} \exp(\frac{-x^2-y^2}{x})dxdy$$

Det vore inte onaturligt, med tanke på integranden, att denna gång integrera över halvcirklarna

$$\Omega_N : (x-N)^2 + y^2 \leq N^2; \qquad x^2 + y^2 \leq 2Nx, \quad y \geq 0$$

Det är åtminstone vad många studenter kommit fram till, kanske efter att ha infört polära koordinater.

Men denna svit tömmer inte ut första kvadranten i lärobokens mening. Halvcirklarna växer till exempel inte förbi de kvadrater vi använde i förra exemplet. Det är en glipa till vänster mellan cirkeln och y-axeln.

Denna glipa smalnar alltmer, ju större radie vi tar till, men fylls inte igen av någon enda halvcirkel. Fixerar vi däremot ett begränsat område, t ex en av de här kvadraterna, kommer glipans area att kunna göras godtyckligt liten. Den går mot noll när cirkelns radie går mot oändligheten.

***

Vi avbryter exemplet för att införa ett begrepp och därtill hörande sats. **Definition** Den växande delsviten Ω_N (av det givna området Ω) uppfyller **måttsvillkoret** om följande gäller: För varje begränsad mätbar delmängd D av Ω gäller att den andel av D som ligger utanför Ω_N har area som går mot noll då $N \to +\infty$

Vi inför beteckningen μ_N för den omnämnda gliparean.

Sats: *Anta att sviten Ω_N uppfyller måttsvillkoret. Då gäller*

$$\int\int_{\Omega} f(x,y)dxdy = \lim_{N \to +\infty} \int\int_{\Omega_N} f(x,y)dxdy$$

Bevis: Vi gör det konvergenta fallet. Kalla den generaliserade integralen för I.

Ge $\epsilon > 0$. Välj ett mätbart begränsat delområde D sådant att integralen över detta område är $> I - \epsilon/2$. Låt M vara f:s maximum över D:s hölje. Välj nu N så att "glappmåttet" $\mu_N < \epsilon/2M$.

Då gäller

$$I \geq \int\int_{\Omega_N} f(x,y)dxdy > I - \epsilon/2 - M \cdot \frac{\epsilon}{2M} = I - \epsilon$$

VSB.

Rita figur. Du ska där tänka att området utanför kvadraten bidrar en integral som är mindre än $\epsilon/2$; detta efter val av tillräckligt stor kvadrat. Fixera kvadraten.

Desto hellre gäller att bidraget från halvcirkelns andel utanför kvadraten är mindre än $\epsilon/2$ - hur stor eller liten än dess radie valts.

Bidraget från den "krokliniga triangeln" till vänster i din figur är – om cirkeln i nästa steg väljs tillräckligt stor – också mindre än $\epsilon/2$. Integralerna över halvcirkeln och kvadraten skiljer sig då med högst ϵ.

Exempel:

Vi återvänder nu till det avbrutna exemplet ovan. Det borde vara klart att halvcirklarna uppfyller måttsvillkoret. Vi behöver inte testa detta på godtycklig, kompakt. Det räcker att testa på en uttömmande svit av kompakta, fundera på detta. T ex de redan omnämnda kvadraterna.

I polära koordinater har cirkelskivorna beskrivningen

$$x^2 + y^2 \leq 2Nx; \quad y > 0; \qquad \rho \leq 2N\cos\varphi, \quad 0 < \varphi < \pi/2$$

Jacobianan är som vanligt ρ, $dxdy = \rho d\rho d\varphi$ Integralen övergår i

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2N\cos\varphi} \rho \exp(\frac{-\rho}{\cos\varphi}) d\rho$$

Efter en stunds räknande, bland annat en partialintegration, erhålles

$$\pi/4 - \frac{3\pi}{4}\exp(-2N)$$

med gränsvärdet $\pi/4$, som alltså är vår önskade integral.

Obegränsad integrand.

Vi går direkt på ett exempel, f ö en trippelintegral. Vi genomför inga detaljbevis (eller ens definitioner!!) utan litar till analogin med föregående exempel.

Exempel

Låt oss beräkna

$$\iiint_{r\le R} \frac{dxdydz}{|\mathbf{r}-r_0\hat{z}|}$$

i fallet att $r_0>0$ är mindre än R, dvs. att singulariteten (nämnarens nollställe), ligger inuti klotet.

För den som läser eller läst elektromagentism bör tolkningen vara klar. Denna integral beskriver potentialen från ett homogent laddat klot, varvid potentialen beräknas i en fältpunkt $r_0\hat{z}$ inuti klotet. Man kan också tänka sig gravitationspotentialen inuti ett homogent klot.

Integranden är alltså obegränsad. Enligt bokens framställning ska en uttömmande svit "växa in i" varje (godtyckligt liten) omgivning av punkten $(0,0,r_0)$. För räkning i sfäriska (rymdpolära koordinater) blir det naturligt att utesluta ett område begränsat av två sfärer, med radie lite mindre och lite större än r_0, samt en kon $\theta=\theta_0$, där vi låter vinkeln gå mot noll. Det blir rätt trassligt att redogöra för fortsättningen, eftersom vi inte har den ringaste lust att beräkna integralen över detta område.

Även i detta fall räcker det att integrera över en svit som uppfyller ett måttsvillkor. Området

$$r_0-1/N\le r\le r_0+1/N$$

är en klotring vars volym går mot noll då $N\to+\infty$. Det räcker därför att beräkna integralen över klotet $r\le r_0-\epsilon$ och klotringen $r_0+\epsilon\le r\le R$, låta ϵ gå mot noll i vardera, samt addera resultaten.

Det gäller

$$|\mathbf{r}-r_0\hat{z}|=\sqrt{(x^2+y^2+(z-r_0)^2}=\sqrt{r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2}$$

.

Volymslementet är

$$dxdydz=r^2\sin\theta drd\theta d\varphi$$

.

Den andra integralen är därför

$$\iiint_{r_0+\epsilon\le r\le R}\frac{r^2\sin\theta}{\sqrt{r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2}}=\int_{r_0+\epsilon}^{R}dr\int_0^{2\pi}d\varphi\Big[\frac{r}{r_0}\sqrt{r^2-2rr_0\cos\theta+r_0^2}\Big]_{\theta=0}^{\theta=\pi}$$

Uttrycket under rotmärket blir en jämn kvadrat när vi sätter in $\theta=0$ och $\theta=\pi$. Den övre gränsen, π, ger $\sqrt{r^2+2rr_0+r_0^2}=|r+r_0|=r+r_0$ medan den undre ger $|r-r_0|=r-r_0$ eftersom $r>r_0$.

Så integralen övergår i

$$2\pi\int_{r_0+\epsilon}^{R}\frac{r}{r_0}((r+r_0)-(r-r_0))dr=2\pi\int_{r_0+\epsilon}^{R}2rdr$$

som går mot $2\pi(R^2-r_0^2)$ då $\epsilon\to 0$.

Vid beräkningen av den första integralen (över ett klot med radie $r=r-\epsilon$ blir räkningarna likartade och lämnas som övning. Härvid ska beaktas att denna gång $|r-r_0|=r_0-r$. Bidraget blir, efter gränsövergång, $4\pi r_0^2/3$.

Den totala integralen blir alltså

$$\frac{4\pi r_0^2}{3}+2\pi(R^2-r_0^2)$$

Om $R < r_0$ blir beräkningen rakare, och för övrigt lik den vi just utelämnade. Resultatet blir $4\pi R^3/3r_0$, dvs. klotets volym gånger en punktkällepotential (källan i origo), vilket stämmer med de allmänna fysikaliska teorierna.