Kapitel L

Linearisera Mera

L.I lineärt förspel.

Implicita funktionssatsen handlar om lösningar till olineära ekvationssystem. Det kan vara lättare att förstå vad satserna säger om man först betraktar det lineära fallet.

Vi studerar ekvationssystemet

$$AX - B = 0$$

där A är $m/n; \quad m \leq n$, med lineärt oberoende rader (dvs. A^t har lineärt oberoende kolonner). Det lineära oberoendet konserveras under radoperationerna (se Kossa D.III.2.; operationerna ändrar inte radernas hölje, därmed inte heller maximala antalet oberoende rader). Vi får en nollskild trappa någonstans.

Vi kan anta att denna visar sig i de m första kolonnerna. Det är då detsamma som att den determinant som bildas av de m första kolonnerna i A har determinant $\neq 0$. Denna omständighet är alltså ekvivalent med att de m första obekanta kan lösas ut och att de $n - m$ sista obekanta uppträder som parametrar.

Dvs. de m första obekanta är funktioner av de $n - m$ sista.

Några specialfall.

I ekvationen

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$$

med $a_1 \neq 0$ kan x_2, x_3 införas som parametrar. x_1 kan lösas ut som funktion av dem,

$$x_1 = \frac{1}{a_1}(b - a_2x_2 - a_3x_3)$$

Vi kan tolka ekvationen som ett plan. Att $a_1 \neq 0$ betyder att planet skär x_1-axeln $x_2 = x_3 = 0$ i en enda punkt, dvs. planet är inte parallellt med denna axel. Din åskådning övertygar dig enkelt om att det är precis vad som behövs för att planet ska innehålla exakt en punkt (x_1, x_2, x_3) ovanför varje punkt (x_2, x_3) i $x_2 - x_3$-planet.

Nu tar vi två plan, med riktigt explicita siffror:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$$

$$x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0$$

Deras skärning är en linje. Om vi eliminerar x_2 eller x_3 försvinner bägge, vilket beror på att deldeterminanten

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = 0$$

Det betyder att x_1 inte kan införas som parameter, x_1 blir ju entydigt bestämt, $= 2$, dvs. linjen är parallell med $x_2 - x_3$-planet. Sedan vi satt in detta värde i båda ekvationerna ser vi emellertid att x_2 (eller, lika gärna, x_3) kan införas som parameter. Detta svarar mot deldeterminanten

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \neq 0$$

ty detta faktum garanterar att inte både x_1 och x_3 försvinner vid eliminationen.

Det är dessa idéer vi vill generalisera till olineära system. I de lineära ekvationernas ställe träder lineariseringar (differentialer) och gradienternas oberoende är den avgörande förutsättningen. Detta uttrycks genom att någon partiell funktionaldeterminant av vederbörlig ordning är $\neq 0$.

I fallet med en eller två ekvationer i $\mathbf{R}^3$, dvs. en eller två ytor, byter vi alltså dessa mot tangentplanen i en (resp. en gemensam) punkt.

Utsagorna måste nu också jämkas till att gälla i en *omgivning* av en given lösningspunkt till systemet. Implicita funktionssatsen är av *lokal* natur.

L.II Implicita Funktionssatsen

Jag tänker visa Implicita Funktionssatsen med växande antal villkor i växande antal dimensioner, dvs. med avtagande geometrisk konkretion. På det viset kan du välja själv hur långt du vill fördjupa dig. Tveka inte att hoppa. Fallen med ett och två villkor bör du åtminstone ta del av.

Notera att egentligen all riktig analys sker i det första steget. Resten är räkning (kedjeregeln) och elementär lineär algebra.

Jag börjar med ett villkor i $\mathbf{R}^2$.

L.II.1 Sats. *$\mathcal{C}^1$-kurvan $F(x, y) = 0$ given. Låt (a, b) vara en punkt på densamma, med $F'_y(a, b) \neq 0$. Då finns omgivningar (öppna intervall) I, J kring a och b sådana att y kan lösas ut entydigt som $\mathcal{C}^1$-funktion av x, $y = g(x) : I \to J, b = g(a), F(x, g(x)) \equiv 0$.*

Det gäller

$$\frac{dg}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

i denna omgivning.

Bevis: Det är ingen inskränkning att anta

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) > 0$$

Det innebär att det finns en sträcka, parallell med y-axeln, centrerad vid punkten (a, b), sådan att $f(y) = F(a, y)$ är en växande funktion utmed denna sträcka. På en liten sträcka upp från (a, b) är således $F > 0$, från punkten och ett stycke ned är $F < 0$. (se figur nedan).

Av kontinuitetsskäl kan vi rentav anta att det finns en rektangel, centrerad i (a, b):

$$|x - a| < \delta_1; \quad |y - b| < \delta_2$$

sådan att

$$\frac{\partial F}{\partial y} > k > 0$$

i hela rektangeln, samt $F > 0$ i alla punkter på rektangelns övre kant och $F < 0$ i alla punkter på den undre.

På varje sträcka $x = x_0, |y - b| < \delta_2$ är alltså F en växande funktion i y-led, vilken antar både positiva och negativa värden. Satsen om mellanliggande värde ger oss att $F(x_0, y) = 0$ exakt en gång, för $y = y_0$, säg. Vi sätter $g(x_0) = y_0$ och har därmed hittat funktionen g.

$\mathcal{C}^1$-egenskapen återstår, liksom derivatans värde. Dem får vi samtidigt. Medelvärdessatsen i en dimension ger:

$$0 = F(x, g(x)) - F(a, b) = F(x, g(x)) - F(x, b) + F(x, b) - F(a, b) =$$
$$F'_y(x, \eta)(g(x) - b) + F'_x(\xi, b))(x - a)$$

där η ligger mellan b och $g(x)$; ξ mellan a och x. Så, för $x \neq a$ gäller

$$g(x) - b = -\frac{F'_x(\xi, b)}{F'_y(x, \eta)}(x - a)$$

Eftersom nämnaren i högerledet är begränsad nedåt av $k > 0$ är kvoten i högerledet begränsad, vilket visar att $g(x) \to b$ då $x \to a$,. Kontinuitet visad.

Dividera båda leden med $x - a$. Låt $x \to a$. Vi ser att $\eta \to b$, $\xi \to a$, så att

$$g'(a) = -\frac{F'_x(a, b)}{F'_y(a, b)}$$

Samma gäller för alla kurvpunker inom den angivna rektangeln. Derivatan

$$g'(x) = -\frac{F'_x(x, g(x))}{F_y(x, g(x))}$$

blir kontinuerlig, eftersom täljare och nämnare i högerledet är kontinuerliga.

Anm.: Existensbevisets idé kan egentligen sammanfattas bäst med hänvisning till funktionsytan i den högra figuren ovan. Vid punkten $(a, b, 0)$ är det uppförsbacke. Då är det uppförsbacke även överallt i närheten av denna punkt.

Beträffande derivatans värde är en rimlig handviftning att teckna ekvationen för tangentplanet till $z = F(x, y)$ vid $(x, y) = (a, b)$:

$$z = F'_x(a, b)(x - a) + F'_y(a, b)(y - b)$$

och sätta in $z = 0$ i vänsterledet. Då skär vi tangentplanet med xy-planet vilket bör ge tangentlinjen till den utskurna kurvan. Sedan är det bara att avläsa riktningen ur ekvationen.

Övningar

L.1 Bestäm normalvektorn till kurvan $F(x, y) = 0$ i punkten (a, b), som du hittills antagligen bara *vetat*.

L.II.2 Exempel: Man får inte försumma att avgränsa området för utlösning av y även i y-led. Ta t ex kurvan

$$F(x, y) = -x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Från någon övning i lineär Algebra känner du kanske igen detta som en hyperbel med asymptoter i linjerna $x = \pm y$. Kurvan har två grenar, en i övre halvplanet (ovanför linjerna $y = \pm x$) och en i det undre. I varje punkt på kurvan gäller $F'_y(x, y) = 2y \neq 0$ men y är inte funktion av x eftersom varje insatt x-värde ger två y-värden,

$$y = \pm\sqrt{1 + x^2}$$

Här räcker det att avgränsa y genom tecknet.

L.II.3 Exempel: Implicit derivering

Vi studerar kurvan

$$F(x, y) = x^3 - 3xy^2 = 1$$

nära punkten $(x, y) = (1, 0)$. Det gäller

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0) = 3 \neq 0$$

så det finns omgivningar av $x = 1$; $y = 0$ där vi kan lösa $x = g(y)$. Derivatan minns vi enklast genom implicit derivering (dvs. vi tillämpar kedjeregeln på identiteten $F(g(y), y) \equiv 1$):

$$\frac{d}{dy}F(g(y), y) = F'_x(g(y), y)g'(y) + F'_y(g(y), y) = 0$$

så att t ex $g'(0) = 0$ eftersom $F'_y(x,y) = -6xy; F'_y(1,0) = 0$.

Är detta ett extremum? Eftersom $g'(y)$ är minus en kvot av $\mathcal{C}^1$-funktioner (F:s partiella derivator) kan vi derivera implicit en gång till:

$$[F''_{xx}(g(y),y)g'(y) + F''_{xy}(g(y),y)]g'(y) + F'_x(g(y),y)g''(y)$$

$$+F''_{yx}(g(y),y)g'(y) + F''_{yy}(g(y),y) = 0$$

varur:

$$F'_x(1,0)g''(0) + F''_{yy}(1,0) = 0$$

Med $F'_x = 3x^2 - 3y^2$; $F''_{yy} = -6x$ erhåller vi

$$g''(0) = 2 > 0$$

alltså ett minimum.

Metod II. Bekvämare, sedan man fastställt att g har tillräckligt många derivator, är att ansätta en Taylorutveckling:

$$x = g(y) = 1 + 0 \cdot y + \frac{1}{2}a_2y^2 + \mathcal{O}(y^3)$$

vilket ger:

$$[1 + \frac{1}{2}a_2y^2 + \mathcal{O}(y^3)]^3 - 3[1 + \frac{1}{2}a_2y^2 + \mathcal{O}(y^3)]y^2 = 1;$$

$$1 + \frac{3}{2}a_2y^2 - 3y^2 + \mathcal{O}(y^3) = 1$$

varur $g''(0) = a_2 = 2$.

Metod III. Ett tredje sätt är att teckenstudera derivatan:

$$\frac{dg}{dy} = -\frac{F'_y}{F'_x} = 2 \cdot \frac{x}{x^2 - y^2} \cdot y$$

Eftersom den första faktorn är positiv för (x,y) nära $(1,0)$ växlar derivatan tecken från negativ till positiv när y växer förbi 0.

Så återigen konstaterar vi minimum.

Metod IV. Man kan tillochmed klara sig utan derivation, ty för $0 < x < 1$ är

$$y^2 = \frac{x^3 - 1}{3x} < 0$$

så kurvan har inga punkter i detta band; $(1,0)$ är dess "vänstraste" punkt, alltså minimum.

Anm.: I polära koordinater är kurvans ekvation

$$\rho^3 \cos 3\varphi = 1$$

att jämföra med hyperbeln

$$x^2 - y^2 = \rho^2 \cos 2\varphi = 1$$

Den senare har två grenar och två asymptoter; du kan nu övertyga dig om att den första har tre grenar och asymptoter. Kontrollera och rita.

Av litteraturen framgår att *funktionsytan* $z = x^2 - y^2$ är en sadel, med plats för båda benen. Ytan $z = x^3 - 3xy^2$ är en *apsadel*, med plats för båda benen och svansen.

Övningar

L.2 Visa att ekvationen

$$F(x, y) = \exp(x + y + y^3) - x = 0; \qquad x > 0$$

bestämmer y som $\mathcal{C}^1$-funktion av x. Vilken är implicita funktionssatsens roll i denna uppgift?

L.II.4 Implicita, ett villkor i $\mathbf{R}^n$.

Allmännare, och med nästan samma bevis, gäller:

L.II.5 Sats. *$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ är en $\mathcal{C}^1$-funktion. Studera ekvationen*

$$F(x_1, x_2 \ldots, x_n) = 0$$

och en punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, med

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0; \quad F'_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0$$

Då finns öppna omgivningar Ω, I av $(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$ resp. a_n i vilka x_n kan lösas som $\mathcal{C}^1$-funktion

$$x_n = g(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) : \Omega \to I$$

med:

$$a_n = g(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), \quad F(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, g(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0.$$

För de partiella derivatorna av g gäller

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = -\frac{\partial F/\partial x_j}{\partial F/\partial x_n}$$

Om någon annan partiell derivata är $\neq 0$, säg den m :e, så är det förstås x_m som kan lösas ut.

Övningar

L.3 Och nu bestämmer vi normalvektorn till ytan $F(x, y, z)$ i punkten (a, b, c).

L.4 Visa att vi kan lösa z som $\mathcal{C}^1$-funktion, $z = f(x, y)$, nära origo, ur sambandet

$$x^2 + y^2 + z + yz^5 = 0$$

Avgör även om funktionen har extrempunkt i (0,0).

L.5 Kurvorna $(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = C$ givna. Ange, för varje C, de punkter där y är som störst och som minst. Det blir lite fall och inte alla C duger. Polära koordinater är användbara.

L.6 Kurvan $F(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 + 2y^3 = 0$ given. lineära delen i origo är noll så vi kan inte begagna implicita funktionssatsen alls.

Fixera nu x nära noll. Undersök F som funktion av y enbart och verifiera att den blir noll för tre y-värden av vilka två går mot noll då $x \to 0$. De har motsatta tecken. Slut att kurvan korsar sig själv i origo. Bestäm grenarnas tangenter, t ex genom att studera kvoten y^2/x^2.

Vilken egenskap hos den kvadratiska delen är avgörande?

L.II.6 Två villkor i $\mathbf{R}^3$

Här gäller återigen att beviset blir likadant för 2 villkor i $\mathbf{R}^n$. Speciellt fallet $\mathbf{R}^4$ är trevligt, eftersom det kommer att ge oss ett bevis för Inversa Avbildningssatsen i två dimensioner.

L.II.7 Sats. *Givet två $\mathcal{C}^1$-funktioner $F(x, y, z), G(x, y, z)$ och en punkt (a, b, c) med $F(a, b, c) = G(a, b, c) = 0$. Anta att den partiella funktionaldeterminanten*

$$D = \det \begin{pmatrix} \partial F/\partial x & \partial F/\partial y \\ \partial G/\partial x & \partial G/\partial y \end{pmatrix}$$

(t ex) är $\neq 0$ i punkten (a, b, c). Då finns omgivningar av $z = c$ och $(x, y) = (a, b)$ där vi kan lösa x, y som funktioner av z:

$$x = g(z), y = h(z); \quad F(g(z), h(z), z) = G(g(z), h(z), z) = 0;$$

$$g(c) = a; \qquad h(c) = b$$

g, h är $\mathcal{C}^1$-funktioner och deras derivator kan lösas ur sambanden

$$\frac{d}{dz}F(g(z), h(z), z) = F'_x\frac{dg}{dz} + F'_y\frac{dh}{dz} + F'_z = 0;$$

$$\frac{d}{dz}G(g(z), h(z), z) = G'_x\frac{dg}{dz} + G'_y\frac{dh}{dz} + G'_z = 0.$$

(t ex med Cramers regel, observera att systemets determinant enligt förutsättning är $\neq 0$).

Bevis: Om den angivna determinanten är $\neq 0$ så gäller detta även om minst ett av dess element. Låt oss, för att vara explicita, antaga

$$\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,c) = 0$$

Då finns omgivningar av $y = b$, $(x,z) = (a,c)$, där vi kan lösa ut y som $\mathcal{C}^1$-funktion, $y = k(x,z)$,

$$F(x,k(x,z),z) = 0; \qquad k(a,c) = b$$

Vi sätter nu i detta i funktionen $G(x,y,z)$ och erhåller funktionen

$$H(x,z) = G(x,k(x,z),z)$$

av två variabler. Vi vill lösa ut x ur ekvationen $H(x,z) = 0$ och behöver visa att $H'_x(a,b) \neq 0$. Det är inte svårt att räkna ut derivatan m h a kedjergeln och det kända uttrycket för k'_x. Jag lämnar det som en senare övning, L.15.

Men för att få ett resonemang som är lättare att generalisera (utan otympliga beteckningar, determinantutveckling, etc.) gör jag ett motsägelsebevis. Vi antar att $H'_x(x,z) = \frac{d}{dx}G(x,k(x,z),z) = 0$ för $(x,z) = (a,c)$. Vi utnyttjar samtidigt att x-derivatan av $F(x,k(x,z),z) \equiv 0$ är *identiskt* lika med noll (i aktuell omgivning), och sätter in $(x,z) = (a,c)$:

$$[\frac{\partial}{\partial x}F(x,k(x,z),z)](a,c) =$$

$$F'_x(a,b,c)\cdot 1 + F'_y(a,b,c)k'_x(a,c) = 0;$$

samt $H'_x(a,b) =$ motsvarande med G istf. F =

$$G'_x(a,b,c)\cdot 1 + G'_y(a,b,c)k'_x(a,c) = 0$$

Men då är $(1, k'_x(a,c)) \neq (0,0)$ en icke-trivial lösning till ett homogent system med determinant $D \neq 0$, motsägelse.

I en eventuellt mindre (säg rektangulär) omgivning av $(x,z) = (a,b)$ kan vi då lösa ut $x = g(z)$ ur $H(x,z) = G(x,k(x,z),z) = 0$; varur, tillsist, $y = k(x,z) = k(g(z),z) = h(z)$. ∎

L.II.8 Exempel: Geometrisk tolkning

En geometrisk tolkning får vi genom att se villkorsytorna $F = 0$; $G = 0$:s skärning som en kurva. Dess tangent (om den alls finns) måste vara ortogonal mot ytnormalerna

$$\nabla F = \begin{pmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{pmatrix}; \quad \nabla G = \begin{pmatrix} G'_x \\ G'_y \\ G'_z \end{pmatrix}$$

och är alltså kryssprodukten av dessa två vektorer.

Dennas z-komponent är just

$$D = \det \begin{pmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{pmatrix} \neq 0$$

vilket antyder stigning i z-led (se Arne P, sid. 132). När vi löser ut y ur den första ekvationen och sätter in i den andra innebär denna elimination att vi finner ett samband mellan (x, z) på kurvan, därmed även på dess projektion i x, z-planet (för det är ju samma (x, z)!)

Men den kurvan måste då också stiga i z-led, vilket "förklarar" att x kan lösas ut. Vi är med andra ord tillbaka i fallet med ett villkor i $\mathbf{R}^2$.

L.II.9 Tre villkor i $\mathbf{R}^3$

Lägger man nu till ett tredje villkor $K(x, y, z) = 0$, $K(a, b, c) = 0$ och, vidare, förutsätter att den fulla funktionaldeterminanten

$$J = \frac{d(F, G, K)}{d(x, y, z)}(a, b, c) \neq 0$$

så visar det sig att man kan gå ett steg till. Efter insättning av $x = g(z), y = h(z)$ får man ekvationen $l(z) = K(g(z), h(z), z) = 0$ med $z = c$ som en lösning.

Med liknande resonemang som förut visas att $l'(c) = 0$ skulle ge att $(g'(c), h'(c), 1)$ vore en icke-trivial lösning till ett system med determinant $J \neq 0$:

$$F'_x(a, b, c)g'(c) + F'_y(a, b, c)h'(c) + F'_z(a, b, c) = 0$$

$$G'_x(a, b, c)g'(c) + G'_y(a, b, c)h'(c) + G'_z(a, b, c) = 0$$

$$K'_x(a, b, c)g'(c) + K'_y(a, b, c)h'(c) + K'_z(a, b, c) = 0,$$

där de båda första ekvationerna återigen kommer ur identiteter. Det är orimligt, så $l'(c) \neq 0$.

Det betyder att ekvationen

$$l(z) = K(g(z), h(z), z) = 0$$

endast har lösningen $z = c$ i närheten av punkten (a, b, c), $l(z)$ är ju monoton vid $z = c$.

Då är även $x = g(z), y = h(z)$ entydigt bestämda, dvs. systemet $F = G = K = 0$ har endast lösningen (a, b, c) i närheten av denna punkt: den är en *isolerad lösning*. Denna iakttagelse är en svag form av Inversa Avbildningssatsen.

L.II.10 Tolkning

Den geometriska tolkning av detta fall är att funktionaldeterminanten kan tolkas som trippelprodukten

$$(\nabla F \times \nabla G) \cdot \nabla K \neq 0$$

Kryssprodukten är, som vi redan sett, tangentvektorn till snittkurvan $F = G = 0$ i punkten (a, b, c). ∇K är normalen till ytan $K = 0$ (tagen i samma punkt).

Att skalärprodukten av kurvtangenten och ytnormalen i fråga inte är noll betyder att kurvan inte tangerar ytan, dvs. den går rakt igenom. Således finns i närheten av skärningspunkten (a, b, c) ingen annan skärningspunkt:

L.II.11 Transversalitet.

I samtliga de tre fall vi diskuterat, med ett, två eller tre villkor i $\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$, kan vi formulera förutsättningen mer symmetriskt.

I det första fallet var en komponent i gradienten $\neq 0$. Vilken komponent som är $\neq 0$ avgör då endast vilken variabel som kan lösas ut i resten: en mer symmetrisk formulering av detta fall är alltså att nollskild gradient medför en lokal parametrisering av villkorskurvan, -ytan etc.

I det andra fallet var en komponent i kryssprodukten $\neq 0$. Gradienterna var icke-parallella, dvs. lineärt oberoende. Återigen får vi en lokal parametrisering.

I det sista fallet var gradienterna icke-komplana, återigen lineärt oberoende, vilket gav lokalt entydigt snitt, en isolerad punkt.

När ett antal villkors-ytor (-hyperytor i $\mathbf{R}^n$) skär varandra i en punkt och har oberoende gradienter där talar vi om *transversalitet*.

I fallet tre ytor i $\mathbf{R}^3$ betyder det att den andra ytan inte tangerar den första, utan skär *genom* den; och att den tredje inte tangerar de båda förstas snittkurva utan skär *över* denna.

Transversalitet för två eller tre plan i $\mathbf{R}^3$ betyder att varje till-lagt plan skär ned dimensionen ett steg.

$\star$ L.II.12 m villkor, $\mathbf{R}^n$.

Beteckningarna är så mödosamma, så jag ska bara skissa detta allmänna fall.

Vi gör induktion över $m \leq n$ och anser oss tidigare ha klarat av fallet $m = 1$, n godtycklig. Vi ska klara steget $m \to m+1$ där vi alltså antar $m \leq n-1$. (Exempel L.I.9. anger hur implicita funktionssatsen ska tolkas för $m = n$; skärningspunkten av n villkors"hyperytor" är, under lämplig förutsättning, isolerad).

Låt villkoren vara

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m+1$$

Låt

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

vara en lösning. Vi antar (evt. efter omnumrering) att

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_{m+1})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_{m+1})} \neq 0$$

i punkten $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ och att samma gäller med m iställetför $m+1$. (om determinanten är $\neq 0$ måste samma gälla om minst en underdeterminant av närmast lägre ordning; detta följer av utvecklingslagarna för determinanter).

Enligt induktionsantagandet kan vi då lösa ut $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (lokalt) ur de m första sambanden, $x_j = f_j(x_{m+1}, \ldots, x_n)$; $j = 1, 2, \ldots, m$.

Vi sätter in i nästa samband och erhåller funktionen

$$G_{m+1}(x_{m+1}, \ldots, x_n) = F_{m+1}(f_1, \ldots, f_m, x_{m+1}, \ldots, x_n)$$

På samma sätt som i det tredimensionella fallet visar vi att

$$\frac{\partial G_{m+1}}{\partial x_{m+1}}(a_{m+1}, \ldots, a_n) \neq 0$$

så att x_{m+1} (lokalt) kan lösas, $x_{m+1} = g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n)$.

Tillsist kan vi, för $j = 1, 2, \ldots m$, bilda

$$x_j = f_j(g_{m+1}(x_{m+2}, \ldots, x_n), x_{m+2}, \ldots, x_n) = g_j(x_{m+2}, \ldots, x_n).$$

och utlösningen är därmed fullbordad.

L.II.13 Transversalitet, igen

Satsens förutsättning innehåller återigen en partiell funktionaldeterminant. Den var $\neq 0$, och det är återigen, för parametriseringens existens, likgiltigt vilken.

Av t ex Sats D.III.4. i Kossan framgår att $p \leq n$ vektorer i $\mathbf{R}^n$ är lineärt beroende om och endast om alla p/p-determinanter som kan bildas ur dem är noll. Jfr inledningen ovan, L.I. Att minst en partiell funktionaldeterminant är $\neq 0$ är alltså återigen ekvivalent med att gradienterna är lineärt oberoende, transversalitet.

Man kan då ge en mer symmetrisk formulering av satsen: Om $\mathcal{C}^1$-funktionerna F_i har oberoende gradienter vid ett gemensamt nollställe, så kan snittet av hyperytorna $F_i = 0, i = 1, 2, \ldots m$ lokalt $\mathcal{C}^1$-parametriseras med $n - m$ parametrar $t_j, j = m + 1, \ldots, n$.

L.III Inversa avbildningssatsen

Vi formulerar Inversa Avbildningssatsen i två dimensioner.

L.III.1 Sats. *Anta att*

$$\mathbf{F} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix}$$

är en $\mathcal{C}^1$-avbildning från en omgivning av $(u,v) = (u_0,v_0) \in \mathbf{R}^2$ *till* $\mathbf{R}^2$. *Sätt* $(x_0,y_0) = \mathbf{F}(u_0,v_0)$. *Anta vidare att funktionaldeterminanten*

$$\frac{d(f,g)}{d(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0$$

Då existerar öppna omgivningar Ω', Ω av $(u_0,v_0), (x_0,y_0)$ *i vilka systemet*

$$\begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

kan lösas entydigt, dvs. avbildningen $\mathbf{F}$ *har (höger-)invers* ˘ $: \Omega \to \Omega'$,

$$\Phi : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x,y) \\ \psi(x,y) \end{pmatrix}; \quad F\Phi \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

(Höger)inversen är också $\mathcal{C}^1$.

Bevis: Satsen följer direkt genom tillämpning av Implicita Funktionssatsen (två villkor i $\mathbf{R}^4$) tillämpad på

$$F(x,y,u,v) = -x + f(u,v)$$

$$G(x,y,u,v) = -y + g(u,v)$$

Observera nämligen att

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \frac{d(f,g)}{d(u,v)} \neq 0$$

i punkten (x_0,y_0,u_0,v_0), vilket medför att u,v lokalt kan lösas ut entydigt ur ekvationerna. ∎

En mer precis formulering är följande:

L.III.2 Sats. *Under ovan angivna förutsättningar finns öppna omgivningar* Ω', Ω *av* (u_0,v_0) *resp.* (x_0,y_0) *sådana att* $\mathbf{F}$ *och* ˘ *förmedlar bijektiva* $\mathcal{C}^1$*-avbildningar mellan dem.*

Preciseringen i denna version av satsen är att de öppna mängderna kan väljas så att avbildningen Φ täcker hela Ω'. Då är sammansättningarna $F \circ \Phi$ och $\Phi \circ F$ de identiska avbildningarna på Ω resp. Ω'.

Bevis: Man låter Ω vara som i satsen och $\Omega' = \breve{\ }(\Omega) = \mathbf{F}^{-1}(\Omega)$ dess fulla bild (urbild) under $\breve{\ }$ (under $\mathbf{F}$.) Vi har att visa att Ω' är öppen vilket *bara* är en omformulering av ϵ- δ-defintionen:

L.III.3 Exempel: Obs. att Jacobianans icke-försvinnande är ett *tillräckligt* villkor för lokal injektivitet. Avbildningarna $x = u^3; \quad y = v^3$ och $x = u(u^2+v^2); y = v(u^2+v^2)$ är exempel på injektiva avbildningar med Jacobiana 0 i origo.

⋆ **L.III.4 Exempel:**

Låt u, v, w vara reella tal, och definiera en avbildning från $\mathbf{R}^3$ till $\mathbf{R}^3$ enligt

$$F(u,v,w) = (p,q,r) \text{ där } (x-u)(x-v)(x-w) = x^3 - px^2 + qx - r$$

Enligt sambandet mellan rötter och koefficienter är

$$p = u + v + w$$

$$q = vw + uw + uv$$

$$r = uvw$$

med Jacobiana

$$\frac{d(p,q,r)}{d(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v+w & u+w & u+v \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}$$

som du med radoperationer lätt beräknar till

$$(u-v)(u-w)(v-w)$$

I en punkt (u_0, v_0, w_0) där dessa rötter är olika är alltså Jacobianan $\neq 0$ och vi får en lokal invers

$$u = u(p, q, r)$$

$$v = v(p, q, r)$$

$$w = w(p, q, r)$$

Det betyder att rötterna till ekvationen

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

lokalt är tre identifierbara $\mathcal{C}^1$-funktioner av koefficienterna.

Jacobianan ovan har ett elementärt, men långt, uttryck i koefficienterna p, q, r. Om $p = 0$ (vilket vi kan åstadkomma genom att byta x mot $x - \frac{p}{3}$) så kan man visa att dess kvadrat är

$$-4q^3 - 27r^2$$

Den kallas ekvationens *diskriminant*.

Övningar

L.8 Betrakta avbildningen $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$. Visa att den uppfyller förutsättningarna för Inversa Avbildningssatsen i *varje* punkt, och formulera vad som kan slutas därur. Rita avbildningens verkan på lämpliga delmängder av (u, v)-planet. Visa att den inte är injektiv och ge exempel på en öppen kurva (skilda ändpunkter) som avbildas på en sluten. Är avbildningen surjektiv?

L.9 En injektiv kontinuerlig avbildning definierad på ett område Ω som varken är kompakt eller öppet behöver inte ha kontinuerlig invers. Illustrera detta för polära koordinater, $x = u \cos v, y = u \sin v$. Uppgiften är alltså att bestämma området Ω.

L.10 Precisera och bevisa påståendet sist i exemplet ovan.

L.11 Funktionalavbildningen ("derivatan", "lineariseringen")

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

blir kanske mer konkret om man ser den som verkande, inte på små vektortillskott, utan på kurvor och deras tangenter. Låt $u = u(t), v = v(t)$ vara en $\mathcal{C}^1$-kurva och $x = x(u, v), y = y(u, v)$ en $\mathcal{C}^1$-avbildning. Bestäm bildkurvans tangent uttryckt i urkurvans.

Verifiera framförallt att tangerande kurvor (samma tangent) avbnildas på tangerande kurvor. Kombinera detta med vad den lineära algebran har att säga om determinantens tecken och lineariseringens inverkan på orienteringar. (kossan, C.IV.4, övn. C.80.)

Utför specialfallet $x = u^2 - v^2; \quad y = 2uv$. Låt verka på enhetscirkeln. Verifiera att ortsvektorn för varje punkt på bildkurvan är ortogonal mot bildkurvans tangent. Vad betyder det?

L.12 Betrakta avbildningen $x = u + \frac{1}{2}v^2; \quad y = \frac{1}{2}u^2 + v$ och dess verkan på kvartscirkeln $u^2 + v^2 = 2, u, v \geq 0$. Bestäm tangenter vid bilderna av $(2, 0), (0, 2)$, gärna fler punkter.

$\star$ Vad händer när du sätter in $u = v = 1$? Du bevittnar ett sammanbrott. Sätt $u = 1+h, v = 1 + k$, där h, k begränsas av kravet $u^2 + v^2 = 2$. Bildpunkten kan skrivas

$$\begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(h,k) \\ g(h,k) \end{pmatrix}$$

där f, g (efter förenkling) är enkla andragradsuttryck. Visa att $k/h \to -1$ när $h, k \to 0$ (på cirkeln) och slut ur detta något om tillskottsvektorns gränsläge. Rita gärna. Har du tillgång till Maple vill du säkert få bekräftelse.

L.13 Låt kurvan $g(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x-2) = 0$ vara given. Verifiera att origo är en punkt på kurvan, att gradienten av g är noll i denna punkt och att den kvadratiska delen av g vid denna punkt är negativt definit. Vad säger detta om punkten? Verifiera så att kurvan berövad denna punkt är en funktionskurva $x = f(y)$ samt att den har en asymptot parallell med y-axeln.

L.14 Betrakta avbildningen

$$x = u^2 - v^2; \qquad y = 2uv$$

Vid vilka punkter är den lokalt inverterbar?

Ange så stora områden som möjligt där den är injektiv. Rita bilden av en liten axelparallell rektangel och en liten cirkelringsektor med medelpunkt i origo samt verifiera i båda fallen funktionaldeterminantens betydelse. Allra sist (efter uppgifterna) ett litet tips.

L.15 Betrakta systemet $F(x, y, z) = 0; G(x, y, z) = 0$, nära en gemensam lösning (x_0, y_0, z_0). Anta att de båda funktionerna är av klassen $\mathcal{C}^1$ och att funktionaldeterminanten m a p x, y (inga z-derivator) är $\neq 0$. Anta vidare $\partial F/\partial y \neq 0$. Anta y utlöst ur den första ekvationen, $y = f(x, z)$, och sätt $H(x, z) = G(x, f(x, z), z)$. Bestäm $\partial H/\partial x$. Slutsats och tolkning?

Jfr med beviset för Implicita, två villkor.

L.16 Lagrange, ett villkor, $\mathbf{R}^3$.

Anta $F(x, y, z)$ maximal i punkten (x_0, y_0, z_0), under bivillkoret $G(x, y, z) = 0$. Anta $\partial G/\partial z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Genom att tillämpa implicita på G, sätta in i F, och teckna vanliga villkor för extremum i fria variabler, verifiera Lagrange-villkoret i punkten (x_0, y_0, z_0), genom att explicit bestämma gradienterna.

L.17 Vi betraktar avbildningen $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ verkande på enhetscirkeln i xy-planet. Dess bild är en sluten kurva i uv-planet. Bestäm denna kurvas tangent, som funktion av x och y. Ange u, v-koordinaterna för de punkter där tangentens vinkel mot ortsvektorn växlar från spetsig till trubbig eller tvärtom. Vilken geometrisk betydelse har dessa punkter på bildkurvan?

L.18 Betrakta avbildningen

$$x_1 = u_1^2 + 2u_2$$

$$x_2 = u_1 + u_2$$

Beskriv bilden av linjerna $u_2 = 0$ samt $u_1 =$ konstant. Härled härur bildområdet. Vad sker, geometriskt vid dennas kant (relatera frågan till betydelsen av Jacobianans tecken, övning 11). Kring vilka punkter är avbildningen lokalt injerktiv?

Tips, uppg. 14. $x_1 + ix_2 = (u_1 + iu_2)^2$.