Hur svårt är epsilon och delta?

Jag tänkte försöka visa att

$$\lim_{x \to a} x^3 = a^3$$

där a, för enkelhets skull, är fixt och > 0.

Vi ska alltså verkligen *visa* att funktionen x^3 kommer hur nära värdet a^3 som helst då x närmar sig a. Samtidigt vill vi ge en exakt formulering av detta faktum.

Vi preciserar först "hur nära som helst" med att

$$|x^3 - a^3|,$$

absolutbeloppet, dvs. avståndet mellan de båda värdena, kommer hur nära noll som helst när x närmar sig a, dvs. när beloppet

$$|x - a|$$

närmar sig noll.

Det var en försiktig, och ofullständig, precisering!

Men tydligt är att vi ska jämföra de båda uttrycken med varandra. Det gör vi genom faktoriseringen

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + xa + a^2)$$

Nu kunde vi lätt gå i en fälla. I högerledet närmar sig den första faktorn noll när x närmar sig a. Den andra går mot $3a^2$. Men då måste ju det senare påståendet preciseras, och bevisas. Dessutom måste vi visa t ex en produktlag för gränsvärden. Dvs., vi har bara skjutit problemet framför oss.

En stunds eftertanke säger att vi inte behöver visa så mycket om den andra faktorn. Vi vill övertyga oss om att den inte blir stor när x går mot a, så att den motverkar litenheten hos den första faktorn. Vi vill med andra ord visa att den är begränsad.

Fast det är den inte, den blir hur stor som helst för stora positiva och negativa x. Men det är ju inte dit vi ska; vi ska inte ut i oändligheten, utan *in mot* a.

Så det är beteendet nära a som intresserar oss och därför begränsar vi den andra faktorn genom att hålla oss till *något* intervall kring $x = a$.

Beteckningarna blir enklast om vi väljer detta symmetriskt kring a, t ex $0 < |x - a| < a$. Annorlunda uttryckt är intervallet $0 < x < 2a; x \neq a$.

Observera att punkten a utesluts, x ska gå *mot* a, närma sig a, aldrig vara lika med a.

På detta intervall är den andra faktorn $< 7a^2$ vilket vi ser med en enkel term-för-term-uppskattning. I det valda intervallet är alltså

$$|x^3 - a^3| < 7a^2 \cdot |x - a|$$

Kan vi säga att vänsterledet obegränsat närmar sig noll då $|x - a|$ gör det? "Närma sig obegränsat" betyder "komma under varje på förhand angiven gräns".

Vi inför en beteckning, $\epsilon(> 0)$ för en sådan angivelse. Vi ser då att vänsterledet hamnar under denna gräns, om x ligger i det mindre av de båda (punkterade) symmetriska intervallen

$$0 < |x - a| < \epsilon/7a^2 \text{ och } 0 < |x - a| < a$$

Väljer vi alltså δ lika med det mindre av dessa båda tal så gäller $|x^3 - a^3| < \epsilon$ om x ligger i intervallet $|x - a| < \delta$. Vi har hittat en begränsning "i sidled" som garanterar en på förhand given begränsning "i höjdled", vilket är vad $\epsilon - \delta$-definitionen av gränsvärde innebär.

Ordet "garanterar" utsäger att vi inte hittat det "bästa" intervallet; det finns kanske större intervall på x–axeln där denna begränsning råder. Det är bortkastad möda att försöka hitta ett sådant "bästa" eller "vidaste" intervall.

Vi har dock antytt en systematik. Det lönar sig ofta att försöka skriva

$$|f(x) - f(a)| = \text{ "nollgående faktor" } \cdot \text{ "begränsad faktor"}$$

Man väljer sedan sitt δ–intervall i två steg. Först tämligen godtyckligt för att begränsa den andra faktorn. Sedan skärper man valet så att hela produkten tvingas under den angivna epsilon-gränsen. Den "nollgående" faktorn kan ofta väljas som $|x - a|$, speciellt för de flesta "elementära funktioner".

Ofta kan man göra det ännu bekvämare för sig. Det räcker uppenbarligen att *överskatta* vänsterledet med ett sådant uttryck som det i högerledet. Ett bra exempel är konstinuitetsbevisen för sinus och cosinus, För båda dessa funktioner gäller

$$|f(x) - f(a)| \leq |x - a|$$

för alla x (och, här, fixt a). Man behöver inte göra om differensen till produkt som man gör i de flesta böcker (Persson-Böiers gör väl ingenting alls, se sid. 115!). En figur på alls). En figur på cirkeln (rita!) visar att $|\cos x - \cos a|$ samt $|\sin x - \sin a|$ är kateter i en rätvinklig triangel, bägge högst lika med en hypotenusa som i sin tur är kordan på bågen i högerledet ovan.

Vi tvingar alltså $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ genom att välja $\delta = \epsilon$, dvs. $0 < |x - a| < \epsilon$. Denna enkla uppskattning uttrycker det faktum att sinus- och cosinus- kurvornas absoluta lutning aldrig överstiger 1, dvs. att alla sekanter som förenar två punkter på funktionsgrafen alltid har en riktningskoefficient mellan -1 och +1. Obs. att jag inte hänvisar till tangenter och derivator här!