Matematisk målsättning. Bidrag till en kurs

Varför målbeskrivningar?

Det finns inget allomfattande svar på rubrikens fråga. Svaret beror på användaren och mediet. Dessa hänger ihop.

Studiehandboken talar om "innehåll" och "mål". Gränserna är inte helt skarpa. Innehållet är i regel en uppräkning av begrepp, delområden och resultat, kanske en sammanställning av textböckernas kapitelrubriker. Målen kan vara mer allmänt hållna. I kursen TATA18, Lineär Algebra Y, är målet detta: "att ge en sammanhållen begreppsram för geometrisk och algebraisk teknik med tillämpningar inom ...(uppräkning)".

Det är min egen formulering så jag måste gilla den. Det framgår vad kursen *inte* är; den är inte en lös samling förfaranden, formler och algoritmer. Den är *sammanhållen*. Begreppen i sig själva är viktiga; vad de är, var de uppträder och hur de ser ut när de används. De håller ihop tekniken. De förvandlar många fakta till få principer.

Den senare uppräkningen av innehållet är ytterst ytlig, endast ett fåtal nyckelord. Det står senare vad litteraturen heter. Det är där detaljerna ska finnas. Sammanfattningar och förord ger ytterligare vinkar om bokens, därmed också kursens filosofi.

Annorlunda blir det på kurser utan officiell litteratur. Men i sådana kurser får man nog också räkna med ständigt föränderligt, delvis differentierat, innehåll. Det rör sig i allmänhet om kurser med få deltagare, t ex min egen i Abstrakt Algebra.

Med tanke på studiehandbokens omfång kan inte målbeskrivningarna göras utförligare än så. Man får nog se studiehandboken som en mycket översiktlig presentation av kursutbudet. Beskrivningarna måste alltid kompletteras alltefter användare. I en studiehandbok är det viktigare att ange förkunskaper och påbyggnad. Det slarvas med det förra.

Således behövs en mer utförlig målanalys inför kursens beställare, nämnden. Detta gäller speciellt nyinrättade kurser. Det kan också gälla kurser i kris eller förvandling. Det kan också behövas gentemot avnämare. De senare har oftast en mycket oklar, rapsodisk och nyckfull uppfattning om tidigare kursers innehåll.

Ofta hänger de upp sig för mycket på detaljer och ord. Känner studenten inte igen det ordet, den detaljen, kan de ingenting.

"Varför har ni inte riktningscosiner" brukade mekanikföreläsare undra om lineär algebra. Vi hade dem, men inte ordet; många formler förenklas när man normerar ingående vektorer. Normeringen visar sig vara det väsentliga. Idén, inte namnet.

I min grupp diskuterade vi en kursplan för en fysikkurs på I-linjen. Jag ansåg att beskrivningen av innehåll och mål var giltig på det viset att den ledde till klara, kritiska, frågor. Innehållet var stort och spände över flera områden av fysiken. Samtidigt formulerades allmänna mål, t ex förståelsen av samspelet mellan experiment och teori, samt analys av felkällor.

Den kritiska frågan är om dessa mål - det kvantitativa och det kvalitativa - förstärker varandra eller kolliderar. Frågan gäller målbeskrivningens trovärdighet, t ex inför studenter.

Man kanske måste se en mångfald fysikaliska begrepp för att se de sammanhållande principerna - eljes finns inget att hålla samman! Eller kanske detaljrikedomen tvärtom skymmer principerna.

Skulle en djupare kurs i *en* av de tre specialiteterna förstärka de allmänna kvaliteterna? Jag ställer frågorna därför att jag inte vet svaren. Kursinformationen på nätet varken ställer eller besvarar frågorna. Nämnden borde ha ställt dem. Hade det handlat om en matematikkurs hade jag inte tvekat om svaret.

Sådana diskussioner är viktiga, inte minst inför studenterna. Målbeskrivningen ges lämpligen av kursinformationen, i kursprogram, och löpande under kursens gång. Det uppnådda relateras till fortsättningen. Delmål kan vara en förutsättning för att ens formulera slutmålen. Själv har jag kursdagbok på nätet i mina tre kurser.

Inför kursen kan man inte göra mycket mer än att beskriva dess innehåll i rätt ytliga termer. Ofta får man vänta en bit in. Att ens antyda de abstrakta begreppen, deras innebörd och syfte, i ex.vis lineär algebra är omöjligt innan man kan exemplifera dem. Det kan man tidigast efter en tredjedel av kursen.

Målbeskrivningen inför studenter - tydligen en fortlöpande process under hela kursen - blir giltig om den ses som lösning på erkända problem.

Vi kan räkna med att flertalet studenter har en deformerad kunskapssyn i matematik. De är vana att varje situation är förberedd för 15 minuter sedan. Flertalet har löst typupuppgifter, vilket är uppgifter med standardiserad formulering och lösningsgång. Helt felaktiga lösningar kan beror på att man förknippar formuleringen med en annan uppgift.

På ett Ume-prov ska studenter avläsa funktionens nollställen ur en graf. Många anger derivatans nollställen. De associerar vanemässigt en graf till en sådan undersökning, extrempunkter och största värde. En målbeskrivning, och därtill hörande hållning, måste alltså klargöra behovet av beredskap inför oförberedda situationer.

Det är alltså viktigt att klargöra vad som döljer sig bakom en rubrik, t ex "differentialekvationer". Studenter tror ofta att det bara handlar om lösningsmetoder, vilka ändå besegras av varje realistiskt problem.

Jag diskuterade en gång en differentialekvation i en kurs i transformteori. Studenterna hade löst den med fouriertransformer. Jag ville anknyta till tidigare metoder, för att klargöra vad en lösning är, egentligen. Det handlade om att klistra ihop lösningar och att anpassa till krav i oändligheten. Jag ställde upp den ena delekvationen och frågade: "hur kommer lösningen att se ut?". Svaret blev "förskjutningsregeln", metoden, lösningsgången.

Men jag frågade efter lösningens *struktur*. Troligen är lösandet av ekvationer nödvändigt för förtrogenhet och överblick av strukturen, men uppenbarligen inte tillräckligt. Man måste utvärdera svar och lösning, kontrollera, anknyta till förutsättningar. Detta måste synas åtminstone i den implicita målbeskrivning som ges av kursprogram, övningsmaterial, lektionsledarens uppträdande (uppföljande, inte inledande), osv. men också formuleras explicit. Jag tror bägge behövs.

Kritik av Bloom

När vi diskuterade fysikkursen TFFY24 märkte vi hur svårt det var att inordna momenten under de 6 rubrikerna i Blooms taxonomi. Det hade onekligen hjälpt om vi vetat mer om kursens praktik, dess litteratur, övningar och laborationer. Men vi kom också fram till att det var för petigt. En del distinktioner är orimliga - de tar isär det odelbara - eller för luddiga.

Ta defintioner. Vad innebär det att kunna en defintion om man inte förstår den, dvs. kan avgöra om enskilda exempel motsvarar definitionen?

Samtidigt är det omvänt ofta möjligt att förstå ett begrepp utan att kunna återge en definition. Den som kan räkna ut en 4/4-determinant med 20 nollor kan definitionen bättre än den som kan rabbla den. Man kan anses ha en rätt god uppfattning om gränsvärden även om man inte behärskar epsilon-delta-formalismen. Det finns ersättningar, t ex att dela upp i "nollgående" och begränsad faktor. Men det är också fullt möjligt att beräkna mycket krångliga gränsvärden utan att ha en aning om innebörden.

Förstår man konvergens av serier om man kan återge definitionerna, tillämpa kritererierna, men inte har någon uppfattning om resttermen? Vad innebär det att den harmoniska serien divergerar? Räknedosan producerar, naivt använd, inte på rimlig tid någon överväldigande partialsumma.

Vet man vad Leibniz' kriterium handlar om, om man använder dess falska omvändning, eller tror att "ungefär monoton" räcker eller tror att man kan tillämpa jämförelsekriterier (olikhet och kvot)?

Ju fler sådana frågor jag ställer - t ex när jag rättar tentor - desto svårare får jag att ta isär kunskapen i alla dessa nivåer. Vad blir kvar?

Flera av de alternativ som beskrevs är förgrovningar av Bloom. De sex nivåerna sorteras i två eller tre grupper. Det visade sig, t ex vid genomgången av fysikkursen, att man kommer långt med att slå samman 1-3 till en grupp, 4-6 till en annan. Grovt sett handlar den första gruppen om "vad", vilka "moment", dvs. begrepp, resultat, algoritmer, etc. som ska ingå. 4-6 handlar om vad man ska kunna göra med dem. Kvantitet och kvalitet. Kvaliteten är det man minns när man glömt detaljerna.

Men när jag gör mina målanalyser är det en tredje fråga som tränger sig på, nämligen "varför". Den verkar inte täckas alls av de här nivåerna. Ändå är det alltid där jag börjar.

Jag beskriver nämligen kurser, explicit och implicit, genom att ange *mål* och *vägar till mål*. I en matematikkurs är det viktigt att förstå vad man gör med sikte på modellering i tillämpningar och vad man gör för att förbereda dessa verktyg. Man kan naturligtvis inte dela fullt så kategoriskt. T ex den konkreta vektorräkningen i lineär algebra har två syften: dels används den i mekaniken, dels levererar den en åskådlig modell för de kommande abstraktionerna. Minsta-kvadrat-problemet generaliserar projektion i plan, eller avstånd mellan skeva linjer, t ex.

Redan denna insikt, om det enskilda momentets roll i helheten, är tillräckligt för att bomba halva den "klassiska" (dvs. gamla) uppgiftsrepertoiren och inspirera nya, oftast ytterst enkla och fundamentala, uppgifter.

En vidare analys säger att de utåtriktade målen i matematikkurser utgör kanske 20 procent, men motiverar de återstående 80. Utomstående ser inte uppbyggnaden och tror ofta att matematik kan läras på kort tid och i vilken omgivning som helst. En del kortsynta beslut har baserats på denna perspektivlöshet. Verkligheten slår tillbaka. I regel är studenterna de första som protesterar. Återigen aktualiseras behovet av fungerande analysverktyg.

Åskådningsexempel: FLERVARIABELANALYS.

Som exempel har jag valt Analys B som är den enda obligatoriska kurs jag föreläser. Den går i D2, men har samma kurskod och examination som Y,I,M. Det är en kurs jag skulle vilja ändra rätt kraftigt, men samläsningen omöjliggör detta.

Jag tänker beskriva kursen som jag vill att den ska se ut. Det innebär också vissa förändringar av kursinnehållet, med tanke på skillnader mellan programmen. M och Y läser Vektoranalys. D gör det inte, men läser ändå senare Mekanik och Elektromagnetism. Dessa kurser, som har gigantisk föreläsningsvolym (och alltså är för stora för poängen), skulle tjäna på att vissa matematiska inslag förbereddes. Jag förutsätter därför i min analys att det ingår en del om linjeintegraler. Sådana förskjutningar eller omstruktureringar av innehållet är rimliga resultat av en mer ingående analys, och därför ännu ett motiv.

Nu innehåller Analys B utöver flervariabeln en del envariabelanalys, nämligen serier. Att detta inte ingår i Analys A beror på att denna kurs är stor nog ändå. Dessutom kräver serieavsnittet mer mognad. Det är lätt att motivera och strukturera, men jag avstår. Jag inskränker mig alltså till flervariabelinslaget, för att få en lite mer koncentrerad och enhetlig framställning.

Jag beskriver kursens mål genom att besvara frågorna "vad?", "hur?" och "varför?". Publiken är teknologer och undervisare i påföljande kurser. Jag använder ett beskrivande och resonerande språk. Jag storknar åt de vanliga rappa uppräkningarna där alla ord är precis lika viktiga.

VAD?

Flervariabelanalys handlar om funktioner av flera variabler, eller av en vektor. Kursen behandlar mest två och tre variabler, dvs. funktionerna beror av punkter eller vektorer i rymden eller planet.

Analysen sönderfaller precis som envariabeln i differentialkalkyl och integralkalkyl. Precis som i envariabeln möts dessa. Det finns en motsvarighet till Analysens Huvudsats som ju jämför funktionsvärden, i ändpunkterna av ett intervall, med integralen av en derivata.

Greens formel jämför en integral över att plant område, en dubbelintegral, med en annan integral, en linjeintegral över dess randkurva.

Den andra mötespunkten är en formel för variabelbyte.

Om enkelintegraler kan uppfattas som areor under kurvor så är dubbelintegraler volymer under ytor. Deras beräkning kan ofta återföras på enkelintegraler.

Linjeintegraler har inte lika enkla tolkningar (utom i fysiken); här är intervallet utbytt mot en kurva. För dem finns också en huvudsats, som jämför integralen (ibland) med värden i ändpunkterna av en *potential.*

Vi behandlar även integraler i högre dimension, trippelintegraler (för funktioner av tre variabler).

Differentialkalkylen handlar om förenklande approximationer. I en variabel approximerar man funktionstillskott med en konstant, derivatan, gånger ett variabeltillskott; funktionskurvan byts mot en linje. Detta är den enklaste formen av linearitet, proportionalitet.

För funktioner av flera variabler ersätts det enda talet av en vektor, gradienten, och multiplikationen av en skalärprodukt. För avbildningar, dvs. vektorvärda funktioner, ersätts det enda talet av en lineär avbildning, en matrismultiplikation. Derivator är alltså vektorer och lineära avbildningar.

I den tidigare nämnda variabelbytesformeln ersätts en transformerande funktion av en transformerande avbildning. Derivatan i envariabelfallet ersätts av determinanten av den nyss nämnda matrisen.

Precis som enkelintegraler kan multipelintegraler vara generaliserade, t ex genom att området är obegränsat. Det nya är att begreppet betingad konvergens inte existerar. Man integrerar över växande begränsade områden och går i limes. Gränsvärdet kan, om integranden växlar tecken, bero på hur områdena väljs.

Taylors formel har en motsvarighet i flera variabler. I envariabeln är också detta ett moment där integralkalkyl och differentialkalkyl möts. Satsen hör till differentialkalkylen, beviset använder itegraler. Flervariabelsatsen återförs på envariabelfallet, så det mötet är redan avklarat.

HUR?

Integraler uppmärksammas huvudsakligen genom beräkningar. Det mekaniska räknandet är nedtonat; det viktiga är att kunna identifiera och beskriva områden, en logisk och geometrisk färdighet, samt att identifiera och utföra några standardsubstitutioner.

Generaliserade integraler tillför komplikationen att välja områden som passsar bra att räkna på. Det är viktigt att förstå behovet av särskilda konvergensbevis om integranden växlar tecken. Analogin med motsvarande undersökningar i en variabel ska förstås.

Differentialkalkylen är klassiskt knuten till standarduppgifter som att maximera riktningsderivator, undersöka extrempunkters karaktär, bestämma största värde över begränsade och obegränsade områden, optimera under bivillkor. Här tonas de tekniska och logiska komplikationerna ned till gagn för den geometriska förståelsen. Allra mest aktualiseras denna i implicita funktionssatsen, om lösbarhet hos olineära system. Det är väsentligt att förstå dess roll för bivillkorsproblem.

Det är också viktigt att ha en intuitiv uppfattning om vad Lagranges kriterium för dessa innebär. Teknikaliteterna undertrycks eftersom fungerande numeriska algoritmer bygger på helt andra metoder.

Det är viktigt att differentialkalklylen lärs på ett sätt som förstärker lineär algebra. Den senare är inte till fullo förstådd förrän dikotomin lineär-olineär är det.

VARFÖR?

Ovanstående utredningar antyder hur olika moment motiverar och betingar varandra. Det finns inte lika entydiga huvudresultat som i envariabeln (huvudsatsen) eller lineär algebra (egenvärdesteori, minstakvadrat); i gengäld kan kursen i alla dess stadier anknytas till tillämpningar. Differentialkalkylen motiveras av olineära fenomen och deras linearisering inom ex.vis robotteknik, mekanik, reglerteknik och neuronnät. Dess begrepp kommer också in i gradientsökningar och newtonförfaranden för att minimera uttryck eller lösa olineära ekvationssystem.

Integraler kan ofta betraktas och motiveras som summor och medelvärden, vilket aktualiserar en annan dikotomi: diskret-kontonuerligt, viktig i all modellering. Tillämpningar finns inom t ex mekanik och sannolikhetslära.

Peter Hackman