Korrespondenssatsen

Detta är en av de fĘ viktigare satser som jag inte hinner bevisa (och jag använder den aldrig i senare teori). Eftersom den i boken är inbäddad i formuleringar av alldeles irrelevant allmängiltighet försöker jag mig pĘ att isolera det väsentliga och förtydliga formuleringen.

..1 Sats. *LĘt R vara en kommutativ ring med etta och I ett ideal i R. Det finns dĘ en bijektion mellan ideal $\overline{J}$ i kvotringen R/I och ideal $J \supset I$ i ringen R.*

Bevis: LĘt π beteckna den kanoniska projektionen $\pi : R \to R/I$ som till varje r ordnar dess klass $\overline{r} = r + I$, $\pi(r) = \overline{r}$. Den är som bekant en homomorfism.

LĘt vidare $\overline{J}$ vara ett ideal i R/I och definiera $J =$ mängden av alla $a \in R$ vilkas klasser i R/I tillhör $\overline{J}$:

$$J = \{a \in R : \overline{a} = a + I \in \overline{J}\}$$

Tillämpar vi detta pĘ $\overline{a} = \overline{0} = I$ ser vi att hela I ligger i J, eftersom $\overline{0} \in \overline{J}$. Att J är ett ideal är en övning pĘ definitionen, t ex:

$$r \in R, a \in J \Rightarrow \overline{r} \in \overline{R}; \overline{a} \in \overline{J} \Rightarrow \overline{ra} \in \overline{J}$$

eftersom $\overline{J}$ är ett ideal, och sĘledes

$$ra \in J$$

enligt konstruktionen av J.

(J är i själva verket kärnan för sammansättningen $R \to \overline{R} = R/I \to \overline{R}/\overline{J}$)

Omvänt, om $J \supset I$ är ett ideal i R sĘ lĘter vi $\overline{J} = \pi(J)$ beteckna mängden av alla $\overline{a} = \pi(a), a \in J$. OcksĘ ideal (vilket inte beror pĘ om $J \supset I$ eller ej), liknande, men lättare, verifikation.

Vi kallar J, bildat ur $\overline{J}$ enligt ovan, för (fulla) *inversa bilden*, $\pi^{-1}(\overline{J})$, av $\overline{J}$; och, förstĘs, $\overline{J} = \pi(J)$ för *bilden* av J.

Det bör vara klart (av rent mängdteoretiska skäl) att dessa bĘda tillordningar är inverser till varandra, vilket ger den pĘstĘdda bijektionen. ∎

..2 Exempel: $R = \mathbf{Z}$, $I = (50)$. Idealen i R/I stĘr enligt satsen i bijektiv motsvarighet till de ideal i R som omfattar $I = (50)$. Enligt motsvarigheten idealinklusion $\leftrightarrow$ delbarhet genereras dessa ideal av faktorerna i 50, de är alltsĘ $(2), (5), (10)$, etc.

Idealen i kvotringen är alltsĘ $(\overline{2}), (\overline{5})$, etc.

Eftersom kvotringen har betydligt fler invertibla element än $\mathbf{Z}$, nämligen 20 stycken, kan generatorerna för idealen väljas pĘ mĘnga andra sätt, t ex är $(\overline{2}) = (\overline{6})$ eftersom $\overline{3}$ är en enhet i $\mathbf{Z}/(50)$.