Konkret matematik, Blad A

Svar ska exemplifieras och kontrolleras, t ex låga fall och randfall. Det är tillåtet att använda maple eller mathematica som facit, men inte som redovisad *kontroll*.

Identiteter som visas på föreläsning eller i bok får förutsättas. Eljes ska de bevisas. Detta gäller speciellt tabulerade, men icke bevisade, identiteter i boken.

Försättsblad till varje omgång: namn, personnummer, epost, gjorda uppgifter. Lösningar på ena sidan av varje blad. Lösningarna lämnas i röda tråget, c:a 3 meter NNV om mitt kontor. **INTE** i mitt postfack! **INTE** e-post !!!

A1) Summera n termer i

a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 + 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 + \ldots$

b) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 + \ldots$

c) $1 + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots$

Ledning (speciellt b)): Lösningarna ska vara *korta*!

A2)

a) Bestäm

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{d}} x^k, \qquad \sum k^{\underline{d}} x^k y^{n-k}$$

A3) Identitet 5.20 i boken kan visas genom att man härleder en rekursion m a p m. Gör det. (man leds f ö till en sådan rekursion om man partialsummerar binomialfaktorn).

Jag tror mig förresten ha gjort ett kombinatoriskt/probabilistiskt bevis genom att studera vägar från ett hörn till en kant, alltid åt höger eller nedåt, på ett schackbräde med m^2 rutor. Hitta gärna ett sådant alternativ (eller bättre!) Det kinkiga verkar vara att klart definiera sannolikheterna för varje fortsättning.

A4)

a) x, n heltal. Visa att

$$\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)\cdots[x^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!n}$$

är ett heltal. Du kan behöva sambandet $x = (x+n) - n$. Du får förutsätta att x, n är positiva.

A5) Bestäm summorna

$$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + \cdots + (n+1)\binom{n}{n}$$

och

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \binom{n}{n}^2$$

A6) Bestäm

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} H_k$$

där H_k är det k:e harmoniska talet. T ex, medels partiell summation.

A7) Bestäm derivatorna av funktionen

$$\frac{\ln x}{x}$$

I denna uppgift, som i så många följande, pröva dig fram genom låga fall, tills du anar mönster, gör sedan induktion.

A8) Anta att vi känner genererande funktionen $f(X)$ för sviten $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Bestäm genererande funktionen för sviten

$$\sum_{k \geq 0}^{n-1} (-1)^{n-k} a_k$$

Testa på $a_k = k^2$. Kan du hitta summan på enklare sätt?

A9 Bestäm det polynom $p_n(X)$, av minsta möjliga grad, för vilket $p_n(k) = k, k = 0, 1, \ldots n-1; \quad p_n(n) = 0$

A10) Beskriv på lämpligt sätt de sviter som har ordinär genererande funktion

$$\frac{1}{1 \pm x^4}; \quad \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3};$$

A11

a) q_n är antalet binära ord av längd n i vilka aldrig två nollor uppträder intill varandra. Ställ upp an enkel rekursion, och lös!

b) Professor P går uppför trappan i antingen enkla eller dubbla steg. På hur många sätt kan detta ske om trappan har n steg?

A12 Betrakta den rekursivt givna sviten $z_0 = 1$;

$$z_{n+1} = \frac{z_n - a}{z_n - b}$$

och vill bestämma den.

Genom att ansätta $z_n = u_n/v_n$ gör man lätt om detta problem till ett lineärt rekursionssystem i u_n, v_n. Bestäm vederbörliga genererande funktioner. Bestäm också z_n i specialfallet $a = 0; \quad b = 2$.

A13 Lös rekursionen

$$u_n = \sum_{0\le k\le n} (-1)^{n-k+1} u_k \cdot (n-k),$$

$u_0 = 1$

A14 Lös rekursionen

$$a_n = a_{n-2} + 4n; \qquad a_0 = 3; a_1 = 2$$

A15 Lös rekursionen

$$(n+2)u_n = (n+1) - n \cdot u_{n-1}; \quad u_0 = 1$$

A16 Sätt $c_0 = 1$. För $n > 0$ definierar vi c_n som antalet ord ur alfabetet $0, 1, 2$ där aldrig två ettor eller två tvåor står intill varandra. Genom att särskilja fallet med två slutnollor bör du kunna ställa upp, och lösa, en andra ordningens rekursion i c_n. Gör det.

A17 Antalet decimaltal med n siffror, i vilka två konsekutiva siffror inte är lika, är förstås 9^n (obs. att vi inte kan börja med en nolla.).

Nu låter vi $A(n)$ vara antalet jämna sådana tal och $B(n)$ antalet udda. Ställ upp ett rekursivt system som uttrycker $A(n+1), B(n+1)$ i $A(n), B(n)$ (hur måste $A(0), B(0)$ defineras ?). Lös detta medels genererande funktioner.

Hittar du en mer direkt metod är du välkommen.

A18 Vi betraktar vägar som förbinder heltalspunkter i planet (ON-system). De ska starta i (0,0). Vägen ska vara sammansatt av sträckor med längden ett. Dessa ska gå parallellt med y–axeln, men endast uppåt ("N"), eller parallellt med x–axeln, framåt eller bakåt ("E" eller "W"). Ingen sträcka för dubbleras, dvs. en E-sträcka får inte följas direkt av en W-sträcka, eller tvärtom.

Låt $f(0) = 1$ och $f(n), n > 0$ lika med antalet vägar med n segment. Ställ upp, och lös, en rekursion för $f(n)$.

A19 F_n är följden av Fibonaccital. Bestäm rekursioner (lineära, homogena, med konstanta koefficienter) för följande sviter:

a) $G_n = n \cdot F_n$

b) $G_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_k$

c) $G_n = F_{2n+1}$

A20 Härled formeln 5.74, p.204, i GKP, enligt följande alternativa metod. Kalla summan s_n. Härled en andra ordningens lineär rekursion för sviten. Ange två begynnelsevärden (beakta binomialkoefficienternas randvärden). Lös med metoden i avsnitt 7.3.

A21 I Republiken Concretia betalar man med mynt i valörerna 1,2,3 pierres d'or. (guldstenar eller guldpetrar, jfr luidårer) Bestäm ett slutet uttryck för antalet sätt, $f(n)$, att betala n pierres d'or. Det kan skrivas som ett polynom i n plus en periodisk term. Genom att granska den periodiska termen lite närmre bör du kunna ge en exakt beskrivning av $f(n)$ i termer av polynomdelens värden. Jfr Betongbokens diskussion om myntväxling.

A22 Vi betraktar en konfiguration av slantar. Först kommer ett antal lika stora slantar i rad efter varandra så att de precis tangerar varandra. Antingen är detta allt. Eller så kommer direkt ovanför den första

raden en ny sammanhängande rad där varje mynt tangerar två i den första raden. Antalet mynt i den andra raden är därigenom strikt mindre. Och så vidare.
Låt $f(k)$ beteckna antalet konfigurationer vars bottenrad har k stycken slantar.
Ställ upp en rekursion och lös.