Konkret Matematik, Blad B

Svar ska exemplifieras och kontrolleras, t ex låga fall och randfall. Det är tillåtet att använda maple eller mathematica som facit, men inte som redovisad *kontroll*.

Identiteter som visas på föreläsning eller i bok får förutsättas. Eljes ska de bevisas. Detta gäller speciellt tabulerade, men icke bevisade, identiteter i boken.

Försättsblad till varje omgång: namn, personnummer, epost, gjorda uppgifter. Lösningar på ena sidan av varje blad. Lösningarna lämnas i röda tråget, c:a 3 meter NNV om mitt kontor. **INTE** i mitt postfack! **INTE** e-post !!!

B1) Bestäm elementära uttryck för summorna

$$\sum_k \binom{n}{k}\binom{x}{k+r}$$

och

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{x+k}$$

B2)

a) Samma uppgift som B1 för

$$s_j = \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{k}{j}$$

där $0 \le j \le n$

b) Resultatet i a) kan skrivas på formen

$$\sum \binom{n}{k}^2 x^k = \sum s_j (x-1)^j$$

Visa detta. Bonus för ett kort kombinatoriskt bevis för denna identitet!

B3) Några identiter i Chapter 5 kan visas genom att man inför genererande funktioner (i en eller flera variabler), byter summationsordning och identifierar term av lämplig grad. T ex 5.23 eller 5.26, eller Problem 2, p. 175. Du verifierar detta påstående i ett av fallen.

B4)

a) Låt $\lambda_k(n)$ vara antalet k–delmängder av $[n]$ som inte innehåller två konsekutiva tal. Härled, enligt mönster av Pascals triangel, en rekursiv identitet som relaterar funktionen λ_k till λ_{k-1}. Rekursionen kan ställas upp i en lite annorlunda triangelform.

Bestäm härur, eller på annat sätt, $\lambda_k(n)$. Kontrollera funktionernas nollställen.

b) $\mu_k(n)$ har samma betydelse som $\lambda_k(n)$ i föregående uppgift, utom att de n objekten nu är ordnade i cirkel, inte lineärt. Visa

$$\mu_k(n) = \lambda_k(n-1) + \lambda_{k-1}(n-3)$$

och bestäm $\mu_k(n)$ ur detta.

B5)

a) $n > m > 0$. Bestäm

$$\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{k-m}\binom{n}{n-k}$$

B6) k är ett givet positivt heltal Definiera polynomet $p(x)$, av grad $2k-1$ genom:

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k-1}{j}(1-x)^j x^{2k-i-j}$$

Visa att $p(x)$ är delbart med x^k och att $p(x) - 1$ är delbart med $(1-x)^k$.

B7) Bestäm summan

$$S(n,k) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{k}{j}\binom{k-1-j}{n-j} \cdot \frac{1}{j+1}$$

B8) Richard Stanley behövde i ett arbete 1985 summera följande:

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{k+1}\binom{d}{k}\binom{2k}{d}(-1)^{d-k}$$

Han ger svaret och hänvisar till ”standardmetoder”. Jag har löst denna med genererande funktioner och har hittills inte stött på någon enda identitet av detta slag som detta misslyckats på. Men han skriver att summan också förmodligen följer av någon standardidentitet. Gör som du vill. Ingen referee i världen ska kunna förenkla ditt svar.

B9) $m > r > 0$, heltal. Bestäm

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k \frac{1}{m-k}\binom{r}{k}$$

e) s, t, r icke-negativa heltal. Bestäm r.

$$\sum_{p=0}^{r}(-1)^p \binom{p+s}{t}\binom{r}{p}$$

Obs. att ingen förutsättning gjorts om hur t ligger i förhållande till de andra talen.

B10) r, u icke-negativa heltal. Bestäm

$$\sum_{s=0}^{r}\binom{r}{s}\binom{2r-s}{u-s}$$

B11) Skriv på sluten form

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{m}\binom{m+2}{n-2k}$$

B12) Skriv summan

$$\sum_k \frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{\binom{x+k}{k}}$$

på sluten form.

B13) Bestäm summan

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$$

B14) Sätt

$$a_0 = \frac{p}{q}$$

och

$$a_{k+1} = \frac{p+k+1}{q+k+1}a_k; \qquad k \geq 0$$

Bestäm summan

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$$

B15) Betrakta alla *kompositioner*

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_d = n$$

där n, d är fixa positiva heltal och de obekanta a_i är poisitiva heltal.
Bestäm, t ex m h a genererande funktioner, summan av alla produkter $a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdots a_d$.
Observera att t ex $1+2+1$, $2+1+1$, $1+1+2$ är tre olika kompositioner av talet 4.

B16) Studera ordinära genererande funktionen för Stirlingtal av andra slaget, med nedre variabeln fix. Dela upp den i partialbråk och utveckla dessa. Vilken (känd) identitet erhålles? Det kan var bekvämt att substituera $x = 1/z$. Du får som alternativ lösa uppgiftyen åt motsatt håll, också.

B17) Bestäm antalet permutationer av $[n]$ som rubbar alla jämna tal, dvs. sådana att $f(2j) \neq 2j, j = 2, 4, 6, \ldots$

B18)

a) En inversion i en permutation av talen $1, 2, \ldots n$ är en förekomst av ett större tal före ett mindre.
T ex har $2, 3, 1, 4$ två inversioner: $2, 1$ och $3, 1$.
Låt $b(n, k)$ beteckna antalet permutationer med k inversioner. Bestäm genererande funktionen

$$B_n(x) = \sum_k b(n,k)x^k$$

, ett polynom.
En början kan vara att uttrycka B_{n+1} som någonting gånger $B_n(x)$

B19) Uttryck den stigande potensen $x^{\overline{n}}$ i fallande potenser $x^{\underline{k}}$. Svaret ska vara fritt från stirlingtal av båda slagen - bland överhuvudtaget in dem! Pröva kombinatoriska resonemang eller Newtons formel. Det räcker att betrakta positiva heltalsvärden på x - varför?

B20) Det n:e Belltalet ω_n, är antalet partitioner av mängden $[n]$, en summa av Stirlingtal. Så då får du rätt snart en exp-genererande funktion för dem. M ha den kan du visa att

$$\omega_n = \frac{1}{e} \sum_{k \geq 1} \frac{k^n}{k!}$$

B21) Visa

$$\sum_l 2^{m-2l} \binom{m}{2l} \binom{2l}{l} = \binom{2m}{m}$$

t ex genom att använda binomialteoremet på ett lämpligt uttryck.

B22) Bestäm $a(n)$ = antalet permutationer π av $[n]$ för vilka $\pi(i) \neq i+1, i = 1, 2, \ldots, n-1$. Ge speciellt svaret, med verifikation, för $n = 4$.
Verifiera också att $a(n) = d(n) + d(n-1)$ där $d(k)$ står för antalet derangemang av $[k]$.
Kan du ge ett direkt bevis för detta faktum?

B23) n herrar besöker ett Tvivelaktigt Etablissemang och lämnar varsitt paraply och varsitt plommonstop i garderoben. Plötsligt varnas de att en polisrazzia förestår och skyndar iväg. Varje herre tar därvid antingen fel hatt eller fel paraply eller båda fel. På hur många sätt kan detta ske?
Svaret ges i form av en ändlig summa.

B24) Bestäm antalet ternära strängar (ord ur alfabetet $0, 1, 2$) som innehåller varje symbol exakt tre gånger, men aldrig tre lika i rad.

B25) Medlemsstaterna i Konkreta Federationen måste ha en särskild sorts flagga. Den ska ha m vertikala band i federationens n färger, av vilka samtliga ska utnyttjas. Två band invid varandra får inte ha samma färg. Flaggan har förstås en bestämd stångsida, så mönster som är varandras spegelbilder kring mittlinjen (men inte spegelbilder av sig själva) gills som olika. Bestäm antalet möjliga flaggor.

Tips: fallet att band jämte varandra får ha samma färg är välkänt och uppfyller en välkänd rekursion. Hitta en liknande i detta fall. Ett rent kombinatoriskt bevis (lättast när du vet formeln) mottages med förtjusning.

B26 Bestäm antalet 0-1-matriser av format m/n, där det står minst en etta i varje rad och varje kolonn. Svaret får innehålla en alternerande summa.

B27) I bokens avsnitt 6.4 antyds hur stirlingtalen

$$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$$

kan lösas ur en första ordningens rekursion (summerande faktor eller "variation av konstanten"). Fyll i detaljerna och gör nu samma för stirlingtalen

$$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$$

(svaret blir en dubbelsumma). Använd dessa resultat till att uttrycka summan

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k^2}$$

m h a stirlingtal av första slaget.

B28)

a) Beskriv på lämpligt sätt produkten

$$e^{-x}(u_0 + u_1 x + \frac{u_2}{2!}x^2 + \frac{u_3}{3!}x^3 + \cdots)$$

speciellt i fallet att $u_n = p(n)$, p polynom.

b) Utveckla lösningen i ljuset av genererande funktioner, och Stirlingtalens egenskaper.

B29) Bestäm derivatorna av e^{e^x}. Börja med låga fall och gissa fram en induktion. Vad får du om du sätter in $x = 0$ i resultatet? Kan detta ses på annat sätt?

B30) Ange metoder att summera varannan, var tredje, etc. term i exponentialserien (lämpliga insättningar, differentialekvationer), gärna också med alternerande tecken.

B31) Beräkna

$$\sum_k (-1)^k \binom{n}{3k}$$

Det kan löna sig att generalisera uppgiften

B32) Bestäm antalet binära ord med n bitar i vilka strängen 01 ingår exakt m gånger. **VG**

B33) Antalet lösningar, i icke-negativa heltal, till

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots x_d = n$$

är, som bekant,

$$\binom{n+d}{d}$$

Bestäm nu antalet lösningar, där samtidigt alla $x_i \leq k$, t ex via PIE som en alternerande summa. Skriv explicit upp fallet $d = 3; \quad n = 18; k = 7$.
Ledning: vad är antalet lösningar med, ex.vis, $x_0 > k$?

B34)

a) Bestäm den expgenererande serien för $d(n)$ = antalet cykliska permutationer av n objekt, $n = 0, 1, \ldots$.

b) Bestäm nu den expgenererande serien $f_k(x)$ för permuationer av n objekt med $2, 3, \ldots, k$ cykler.

c) Låt $s(n, k)$ = antalet permuationer av n objekt, med k cykler (alltså Stirlingtal av första slaget). Låt $H(x, y) = \sum x^n y^k/n!$, bestäm summan. Vad får du när x^n-termen identifieras? **VG**

B35)

a) Vi betraktar en särskild sorts permutationer på en mängd med jämnt antal element, $2n$ De ska vara *fixpunktfria*, och *involutiva* (självinversa).

Det betyder att den givna mängden kan partioneras i n par av element som avbildas på varandra. T ex, om $n = 2$: $\tau(1) = 2; \tau(2) = 1; \quad \tau(3) = 4, \tau(4) = 3$

Låt $f(n)$ vara antalet sådana permutationer på $[2n]$. Bestäm den expgenererande funktionen.

b) Låt $g(n)$ definieras på följande sätt. Vi delar $[n]$ i två delmängder (den ena kan vara tom). Vardera mängden fördubblar vi (vi kan tänka oss att om elementet m ingår så ska nu även $-m$ ingå.). På vardera inför vi en sådan permutation som i del a).

$g(n)$ är antalet sådana konstruktioner. (konstruktioner som hör till olika partitioner ska betraktas som olika!). Bestäm *dess* exp-genererande funktion, därpå även $g(n)$ själv.

B 36) Permutationer kan framställas i *disjunkta cykler*.

Ett exempel bör räcka: $\tau = (1357)(24)(6)$ innebär att $1, 2, 3, 4$ permuteras cykliskt:

$$\tau(1) = 3, \quad \tau(3) = 5, \quad \tau(5) = 7, \quad \tau(7) = 1$$

(tänk dig de fyra elementen ordnade i ring); att $2, 4$ avbildas på varandra, och att 6 fixeras (sådana cykler brukar inte skrivas ut, alls).

Observera att t ex $\tau = (5713)(42)(6)$ är en annan framställning av samma permutation. Samma partition, men cyklisk förkjutning inom varje parentes.

$\tau : [7] \to [7]$ består alltså av en 4-cykel, en 2-cykel och en 1-cykel.

a) Hur många k–cykler kan man bilda av k element?

b) Låt $f_k(n)$ vara antalet permutationer av $[n]$ vilkas disjunkta cykelframställning inte innehåller någon k–cykel.

Bestäm $f_k(n)$ som en alternerande summa. Fallet $k = 1$ är välkänt.

B37) Anknyt till diskussionen på sid 171 samt ledningen till övning 5.86. Studera uttrycket

$$\Pi_{i \neq j}(1 - \frac{z_i}{z_j})^{a_i}$$

Relatera 0-e-grads-termen till någon av summorna på sid. 171. Specialfallet a_i:na lika kan skrivas om på ett sätt som passar bättre till övning 5.86. Gör det. Och/eller visa den märkliga identiteten

$$\sum_{k=0}^{2m}(-1)^k \binom{2m}{k}^3 = (-1)^m \binom{3m}{2m}\binom{2m}{m}$$