Konkret Matematik, blad C

Svar ska exemplifieras och kontrolleras, t ex låga fall och randfall. Det är tillåtet att använda maple eller mathematica som facit, men inte som redovisad *kontroll*.

Identiteter som visas på föreläsning eller i bok får förutsättas. Eljes ska de bevisas. Detta gäller speciellt tabulerade, men icke bevisade, identiteter i boken.

Försättsblad till varje omgång: namn, personnummer, epost, gjorda uppgifter. Lösningar på ena sidan av varje blad. Lösningarna lämnas i röda tråget, c:a 3 meter NNV om mitt kontor. **INTE** i mitt postfack! **INTE** e-post !!!

C1) Summan $1^m + 2^m + 3^m + \ldots + k^m$ kan som bekant uttryckas m h a Bernoullital. Den kan också beskrivas med Stirlingtal av andra slaget och binomialkoefficienter. Gör det. Antalet termer ska givetvis endast bero på m.

C2) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ givna. Uttrycket

$$\sum_{k_1<k_2<\ldots<k_r} x_{k_1} \cdot x_{k_2} \cdots x_{k_r}$$

kallas den r:te *elementarsymmetriska summan* av dessa x_i. Summeras istället *alla* monom av grad r erhålles den r:e *totala* symmetriska funktionen av de givna x_i. Ställ upp genererande funktioner för bägge, och bestäm sambandet mellan dessa. Anknyt därpå till föregående uppgift (med lämpliga heltal insatta för x_i:na.

C3) Visa

$$B_n = \sum_{x\geq 0} \frac{(-1)^m}{m+1} m! \left\{ {n \atop m} \right\}$$

Här ingår Bernoullital samt Stirlingtal av andra slaget.

C4) Visa att $B_m(x+1) - B_m(x) = mx^{m-1}$ och $B_n(1/2) = (-1 + 2^{1-n} B_n$. Eftersom boken ger en held el hjälp forstätter du genom att bestämma den formella serieutvecklingen av

$$\frac{e^x}{1+e^x}$$

C5) Visa

$$\sum_{j=0}^{k-1} B_n(x+\frac{j}{k}) = \frac{B_n(kx)}{k^n}$$

C6) Sätt

$$f(X) = (X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n) = X^n - s_1X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$$

s_k:na är de så kallade elementarsymmetriska funktionerna i $x_1, \ldots, x_n$. Låt vidare

$$t_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

Genom att partialbråksuppdela

$$f'(X)/f(X)$$

kan man hitta samband mellan s:en och t:na som ger att den ena följden kan lösas rekursivt uttryckt i den andra. Gör det, och erhåll de s k Newtons formler.
Härled nu ett samband mellan Stirlingtal (av första slaget) och Bernoullital.

C7) QUICKSORT. Ska rekursivt sortera en lista med n olika heltal givna i någon ordning. Låt det första vara a. Dela listan i två listor L^+ och L^- bestående av tal större och mindre än a. Sortera dessa.

Låt q_n vara genomsnittliga antalet jämförelser vid sorteringen. Ställ upp en rekursion och bestäm genererande funktion, därpå q_n själv (man erhåller en differentialekvation). Du bör kunna bevisa att $q_n = n \ln n + \mathcal{O}(n)$, kanske rentav utan att ens bestämma q_n explicit!!

C8)

a) Vad säger Stirlings formel om asymptotiken för

$$\binom{2n}{n}?$$

Svaret står i en övning i betongboken. Du ger de två första termen plus verifierat ordo-fel.

b) Summera

$$\sum_{1\le k\le n} f(k),$$

där $f(x) = \sqrt{x}, \sqrt{1/x}$ på sluten form plus $\mathcal{O}(1/n^2)$. Konstanttermen behöver ej bestämmas. (jfr Eulers konstant, som är känd genom sitt namn, och Stirlings konstant som *råkar* gå att bestämma.

C9) Genom ett enkelt trick kan asymptotiken för

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$$

härledas ur den för de fulla harmoniska summorna. Gör det. Visa åtminstone att summan kan relateras till ett uttryck innehållande $\ln n$ och Eulers konstant.

C10)

a) Beräkna

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10^6}}$$

med 4 korrekta decimaler!

b) Samma uppgift för

$$\sum_{k=10}^{10^3} \frac{1}{n^2}$$

c) Bestäm gränsvärdet av

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{2}{3}n$$

då $n \to +\infty$.

C11) Antalet gitterpunkter innanför en cirkel med radie R kan asymptotiskt relateras till arean. Gör det, med angivande av ordo-fel och noggrann motivering.

Med ett liknande asymptotiskt resonemang, visa att antalet gitterpunkter (komplexa heltalspunkter) i kvadraten uppspänd av $m + ni$ och $-n + mi$ är, ja, vad? I kvadraten ska, av två parallella kanter, endast den ena räknas in.

C12)

a) Som bekant definierar vi

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Resttermen i serien är summan tagen från $n = N+1$. Ange asymptotiska utvecklingar av resttermen av serierna $\zeta(2), \zeta(4), \zeta(6)$, i negativa potenser av N.

b) Hur skulle du vilja behandla motsvarande asymptotik för serien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right)$$

med känd summa $\pi/4$? Summan ska börja med $1/(2N+1) - 1/(2N+3)$ och asymptotiken ska anges i negativa potenser av N.

C13) Vi betraktar resttermen till Taylorserien $\ln(1+x)$, med $x = 1$ insatt. Enligt en sats av Abel (Abels kontinuitetssats) är summan verkligen $\ln 2$ (vad som händer på randen av konvergensintervallet är inte trivialt).

Vi kan t ex skriva resten på följande form:

$$\sum_{m=M}^{+\infty} \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2}\right)$$

och en asymptotisk utveckling i potenser av $N = 2M$ efterfrågas. Koefficenterna kan uttryckas med Bernoullipolynomens värden i vissa punkter. Ange åtminstone en exp-genererande serie för koefficienterna

C14) Låt $F_0 = 1$ och sätt $F_n =$ antalet avbildningar från $[n]$ till $[n]$ vilkas bild är något $[m], \quad m \leq n$.

a) Bestäm F_n som en summa över m.

b) Bestäm härur den expgenererande funktionen för sviten F_n, på sluten form.

c) Bestäm härur, eller direkt, en faltningsekvation ur vilken F_n kan bestämmas rekursivt.

Du kan vilja skriva ett script som bestämmer $G_n = F_n/n!$ för ett antal värden på n.

Uppgiftens fortsättning, längre ned, förutsätter analys-kunskaper.

C15) För restintegralen

$$I(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

gäller en asympototisk utveckling

$$I(x) = e^{-x^2}(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \ldots + \frac{a_k}{x^k} + \mathcal{O}(x^{k+1}))$$

Bestäm den. Diskutera konvergens och numerik, t ex, hur det bästa numeriska felet (efter val av antal termer) beror av värdet på x.

Ledning:

$$e^{-t^2} = t \cdot \frac{1}{t} \cdot e^{-t^2}$$

C16) Sätt

$$f(X) = (X - x_1)(X - x_2) \cdots (X - x_n) = X^n - s_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$$

s_k:na är de så kallade elementarsymmetriska funktionerna i $x_1, \ldots, x_n$. Låt vidare

$$t_k = x_1^k + \cdots + x_n^k$$

Genom att partialbråksuppdela

$$f'(X)/f(X)$$

kan man hitta samband mellan s:en och t:na som ger att den ena följden kan lösas rekursivt uttryckt i den andra. Gör det, och erhåll de s k Newtons formler.

Härled nu ett samband mellan Stirlingtal (av första slaget) och Bernoullital.

C17) Anknyt till uppgift 14. Genom en ny serieutveckling av den expgenererande funktionen (varvid varje koefficient kommer att få oändligt många bidrag) bör du kunna visa att

a)

$$F_n = \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{2^{k+1}}$$

som konvergerar (eftersom termerna går exponentiellt mot noll)

Medels Euler bör du sedan kunna visa att

$$F_n = \mathcal{O}(\frac{\sqrt{n} \cdot n!}{(\ln 2)^n})$$

Om du kan funktionsteori (komplex analys) kan du rentav (med konvergensradiens hjälp) visa att

$$F_n \sim \frac{n!}{(\ln 2)^{n+1}}$$

(En student lyckades 1998 visade detta genom en listig uppdelning av restintegralen, och helt utan komplex analys. Själv har jag också gjort (och glömt!) det medels Bernoullitalens asymptotik, vilket var krångligt; denna asymptotik kräver kunskap om antingen fourierserier eller återigen komplex analys!)

C18) Serien

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

konvergerar, men långsamt. Visa att det behövs mer än 400 miljoner termer för att beräkna resultatet med en korrekt decimal (hur många för två?). Det tar mer än en halv minut för min matlab att beräkna och presentera en partialsumma med en miljon termer, så det verkar ju rätt hopplöst. Kan du komma på något sätt att underlätta summationen? Med motivering.