Om påstådda och verkliga reformbehov

(Olle Häggström recenserade Claes Johnsons mfl. bok "Dreams of Calculus" i Svenska matematikersamfundets Utskick våren 2004. Johnson är professor i beräkningsmatematik med kontroversiella synpunkter på undervisningen i grundläggande matematik. Ett upprört genmäle publiceras i oktober 04 och finns på professor Johnsons website).

I.

Claes Johnsons långa replik på Olle Häggströms anmälan förstärker tyvärr fokuseringen på Johnsons egen person, och på Chalmers interna problem. Det är att göra både sig själv och saken en otjänst. Sådant uppmuntrar också det defensiva fasthållandet vid slentrian och eftergifter inom den "traditionella" matematikundervisningen.

Johnson och hans medarbetare bör tas på allvar. De inte bara predikar, de har också bundit sig för en konkret hållning genom sina (hittills) tre böcker, och tillhörande mjukvara, Body and Soul. De har skrivit böcker om ett ämne istället för en kurs (mycket ovanligt i Sverige!) och gräver i alla ändar av (den "kontinuerliga") matematiken, ända ned till talsystemens grunder. Det är ju inte riktigt sant att "de vill göra **FEM** av allting" som det ibland har hetat.

Jag hade ett tag funderingar på att recensera böckerna mer ingående men fann materialet - är det 1000 sidor? - väldigt svåröverskådligt. Det är ett pedagogiskt problem och ett lika stort pedagogiskt problem är förstås Johnsons sätt att framföra sitt budskap. Jag hade en kort brevväxling med honom för ett antal år sedan och undrade, att nu när jag vet vad du vill ha in, vad exakt är det då som ska ut? Svaret var, istortsett, att allt viktigt fanns med med, inget behövde offras. Sådan tvärsäkerhet övertygar inte mig.

Skälet till den kontakten var att jag själv ser ett stort reformbehov. Datorernas och datorprogrammens snabba utveckling är en del av orsaken, men inte på det sätt som många tror. Datorer är inget läromedel, vilket för övrigt många tillämpare också betonar. De avlastar inte från eget handräknande och ritande men klargör äntligen dess rätta roll: förtrogenhet, inte färdighet.

Men då krävs en kraftig rensning i den gängse problemfloran, med dess onaturligt hopskruvade "typuppgifter", t ex när är $\sin 3x = \cos(5x + \pi/3)$ (rätt svar: aldrig), tredimensionell koordinaträkning på formler som förvandlar en enda princip till sju isolerade fakta, räknedigra integraler, ekvationssystem med parametrar och matrisekvationer av en typ som man aldrig stöter på i verkligheten och för vilka det inte finns någon teori.

Min fysikkollega Lars Engström säger ofta att "det är med begreppen man begriper" och då ska man förstås ha begripit begreppen. Det är illa med den saken, till stor del beroende på studenternas vanor och förväntningar. Men hur möts dessa? Och har undervisarna den tid, de resurser och det *stöd* som behövs?

Varför glömmer så många studenter vad egenvärden är när de "kan" (den praktiskt ointressanta) sekularekvationen? Hur många har egentligen förstått vad lagrangeproblem är när en obetydlig förkjutning av uppgiftslydelsen får 90 procent att utnämna den ena av två bivillkorsfunktioner till målfunktion?

Detta handlar om mycket svåra, men klassiska och mycket allmänna, didaktiska problem på moment som vi tar för givna i kursplanerna. Det måhända paradoxala och vemodiga är att massfenomen som dessa inte är åtkomliga genom massundervisning.

Problemet är att få studenter att förstå att matematik består av *satser*, vilka uttalar sig om *begrepp*, vilka har *definitioner* och som är giltiga under vissa *förutsättningar*, samt att utsagorna har med något slags verklighet och åskådning att göra.

Och detta utan att de klagar att "nivån är för hög"!

Ännu ett av mina favoritexempel är implicita funktionssatsen, i låg dimension en mycket konkret sats, som träffar själva den geometriska nerven i differentialkalkylen. 95 procent av studenterna missar trots figurer och exempel att satsen är lokal och - mycket, mycket värre - de missar även *förutsättningen* att någon lösningspunkt från början ska vara känd.

Det beror inte på hur denna sats undervisas, utan *på hur matematik undervisas.* Och, därmed, hur studenter är vana att lära sig. Vanan tycks vara att härma lärarens armrörelser under den ordergivning som föregår deras eget övande. Lösningarna ska satisfiera en lösningsgång, inte själva problemet.

Det didaktiska problemet förvärras av att undervisare uppmuntras att ta den lättaste vägen genom uppgiften. Jag skrev en gång egna övningssamlingar med ambitionen att med försiktigt motstånd lotsa studenter genom, inte förbi, svårigheterna med nya tänkesätt: de skulle öva *till*, inte bara *på* resultaten, så att det induktiva föregick det deduktiva. Jag fick skrota materialet därför att idén stred mot både lärarnas och studenternas vanor. Ny var den dock inte. Den finns t ex exemplifierad i Severin Johanssons bok "Matematiken i Finlands skola" från 20-talet.

Emellanåt förundras jag över hur mycket som finns kvar av ett innehåll som jag fann föråldrat redan under min studietid för 40 år sedan! Transformationer av andra ordningens differentialuttryck, t ex, kanske det säkraste sättet att förstöra all känsla för kedjeregeln. De exakta metodernas överhöghet har också lett till en flora av noga tillrättalagda uppgifter, t ex uppspårandet av stationära punkter, vilka blir ointressanta i samma ögonblick som de blir problem.

De senaste årens huvudvärk har för mig varit kvalitativa undersökningar av serier, där termerna ofta ser ut som

$$a_n = f(\frac{1}{n}) - g(\frac{1}{n})$$

med lämpligt mått av kancellation i taylorutvecklingen. Studenterna vet oftast inte vad frågan gäller och man kan undra om de ges chansen.

Kriterierna citeras på måfå. Det nödvändiga villkoret, att termerna går mot noll, är tillräckligt om det är nödvändigt för att få ut uppgiften. När jämförelsen med en "katalogserie" (med termen $1/n^a$), med alldeles korrekt dominant, råkar gå åt fel håll (det är därför man studerar kvoten a_n/b_n) kan studenten tillgripa det grövre rot- eller kvotkriteriet; gränsvärdet blir ett vilket plötsligt visar konvergens.

Distinktionen mellan polynomiellt och exponentiellt beteende går alltså inte hem - och jag kan inte säga att det betonas i gängse texter.

Här handlar det, tror jag, om uppgiftsfloran. Uppskattningar av resttermen, att serien faktiskt konvergerar mot *något*, och si eller så fort, behandlas som överkurs, fast det borde vara huvudsaken och mer konkret för studenterna. Moment som inte kan föras till sina naturliga mål borde utgå helt. Vad är det för mening med att studera potensserier om man *bara* "lär sig" bestämma konvergensområdet, inklusive den (i det reella fallet) totalt ointressanta randen?

Alla “vet” att serien $1/n(\ln n)^2$ (en typisk textboksserie) konvergerar. Hur många termer ska tas med för att ge summan med en korrekt decimal? Ställer man den frågan kanske en del studenter börjar fundera på vad man ska göra istället. Kanske de börjar fundera över meningen med konvergensundersökningar överhuvudtaget.

Otillfredsställsen med min egen utbildning är väl det som under 34 år vid LiTH fått mig att ifrågasätta mycket av det traditionella innehållet. Jag har vant mig att sätta likhetstecken mellan “nyttig logisk träning” och “slentrian”. När jag blev examinator för Y-linjens lineära algebra 1978 bestämde jag att matrisräkning och tredimensionell vektorräkning inte skulle ges något självständigt examinationsvärde utan endast betraktas som stadier på vägen mot målen. Där försvann horder av meningslösa uppgifter (men inte alla, och jag står inte för allt som kom istället!)

Senare bestämde jag också att två eller tre uppgifter (av 7-8) på tentan skulle handla om egenvektorer och att *icke en enda poäng* skulle ges för själva beräkningen av dessa! De skulle användas till något. Hur vanlig är den attityden?

II.

Även i Linköping har numeriker velat koppla greppet om den grundläggande matematiken. En framstöt gjordes 1982, beträffande lineära algebran - detta var i Matlabs barndom. Typiskt var att det som inte intresserade numerikerna själva skulle stympas och att teorin i övrigt, på bräcklig grund, skulle drivas mycket långt, förvisso mot mycket intressanta ämnen som SVD, bruket av isometrier vid lösning av minsta-kvadratproblem, samt det duala minsta-kvadrat-problemet.

Det blev inte så, men aktionen framtvingade en översyn av målen, en process över flera år. Det avgörande den gången var att jag ännu ivrigare än tidigare sökte impulser hos andra, t ex reglertekniker, bildbehandlare, bildkodare och signalbehandlare. Dessa avnämare har fler hjärnhalvor än numeriker! De skulle förstås önskat en viss reformering av den numeriska analysen, t ex SVD!

Den bild av matematikbehovet, som jag därmed skaffade mig, är därför mer nyanserad och mångfacet terad, rentav splittrad, än den som Johnson och hans grupp brukar framföra. De flesta talar mer om modellering och design än om beräkningar.

Ännu mer är det så med den utredning som LiTH:s dåvarande dekanus, Mille Millnert, beställde av mig år 2000 och som publicerades på min hemarea den 21 januari 2001: http://www.mai.liu.se/∼ pehac/contact.html 100 personer deltog i undersökningen, därav ett dussin verksamma inom industrin.

Vad kan då läggas till den brokiga bilden efter studiet av Body and Soul-böckerna? När det gäller Analysen är de så sprängfyllda med infall och påhitt att jag undrar vad någon med didaktisk och organisatorisk talang skulle kunna göra av stoffet. Det skulle krävas månader av arbete att kritiskt gå igenom det.

Det är samtidigt flera pedagogiska missar som avslöjar att författarna inte kan ha särskilt mycken erfarenhet av grundutbildning. Det kan t ex gälla detaljer som att inte sätta ut parentesen i en trippelskalärprodukt, $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$. Det kan gälla större ting som att diskutera trigonometriska additionslagar utan hänvisning till en cirkel. Dessa lagar borde knytas till allmänna principer som symmetri och linearitet, förstås.

Kvantitativa begrepp som “stark differentierbarhet” (med kvadratiskt fel) samt Lipschitz-kontinuitet betonas kraftigt i Body and Soul. Det senare är ju ändå nästan alltid det man härleder vid ett kontinuitetsbevis. Det verkar vara en fruktbar och konkret idé ända tills jag undrar varför beviset för Analysens Huvudsats blir så långt. Med ett mera restriktivt kontinuitetsbegrepp borde det rimligen bli kortare!

Bitvis framskymtar föreställningen om beräkningsmatematiken som själva målet. Vektorräkning är från första början komponenträkning, efter amerikanskt mönster. Om detta säger Anders Klarbring, professor i mekanik vid LiTH: “min personliga uppfattning är att man i matematiken kanske för snabbt sätter likhetstecken mellan geometrisk vektor och taltrippel”. För snabbt? Genast!

Typisk är också strävan att fort komma till det egna - det är extra värt att observera, ty det gäller nästan alla som har synpunkter på hur matematik borde bedrivas. Grunderna är triviala och kan därför forceras.

Behandlingen av allmän lineär algebra är sålunda den mest kompakta och abstrakta jag någonsin läst (inkusive min kurslitteratur för 40 år sedan), med en enda figur.

Minsta-kvadrat-problemet tar sats i det abstrakta projektionsbegreppet och dess abstrakta egenskaper utan förberedelse, en intellektuell rysare. Den som vill kan jämföra med min egen framställning i Boken Med Kossan På Kapitel E (boken finns fri på min hemarea), som utgår från ortogonal projektion i ett plan.

Alla allmänna resultat beskrivs i detta specialfall; vad som återstår i högre dimension är huvudsakligen ett existensbevis: projektioner och ON-baser *finns*.

Jag nämner detta, inte för att framhålla mig själv, utan tvärtom därför att denna tålmodigare och mer konkreta framställning av det stora flertalet studenter döms ut som alldeles för abstrakt, kompakt, omotiverad, ostrukturerad och dåligt illustrerad (5 figurer).

Det är sådan konkret erfarenhet som får mig att undra om det inte finns lite av ett glapp mellan Johnsons anspråk och verkligheten. Jag skulle välkomna en seriös objektiv utredning av Johnson-gruppens projekt i praktiken. Vad fungerar, vad fungerar inte, vad kan vi andra lära oss av både framgångar och misslyckanden?

Jag tror också att en mindre antagonistisk (och rentav hånfull) hållning skulle ha öppnat för dialog. Att undervisa grundläggande matematik, speciellt för dåligt förberedda och omotiverade studenter - tro inte att de därför är mer intresserade av tillämpningar! - borde kanske vara ett slags pedagogisk värnplikt för avnämare och nämndledamöter vid tekniska högskolor! Man kan bara reformera reformera utifrån kunskap, aldrig fördomar.

Likväl inspireras jag. Den som skummat igenom böckerna borde, alldeles oberoende av frågor om organisation och metodik, ledas att fundera över i vilken utsträckning kvantitiva begrepp förklarar sambanden bättre än gängse kvalitativa - man kunde passa på att läsa den mer välskrivna Practical Analysis av D Estep, författargruppens amerikanske medlem. Om inte slutsatsen ser ut som Johnson-gruppens praktik ska den verkligen inte heller i alla delar se ut som nuvarande grundkurser i matematik.

Peter Hackman,

LiTH

Fotnot 1: Severin Johansson, 1879-1929, finländsk matematiker, professor och rektor för Åbo Akademi. Författarens morfar.

Fotnot 2: En del av ovanstående funderingar utvecklas också i http://www.mai.liu.se/∼ pehac/y30.html : “Matematiken är promiskuös”, samt http://www.mai.liu.se/∼ pehac/serier.ps “Konvergens - mindre att och mera hur ”