.I Termvis derivation av potensserier.

Kanske det viktigaste man kan göra med potensserier är att derivera dem. Summafunktionen är deriverbar i det inre av konvergensintervallet och derivatan fås, som man kunde hoppas, genom termvis derivation

Dvs, om

$$s(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

har positiv (eller oändlig) konvergensradie R, så gäller

$$\frac{ds}{dx} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

för alla x med $|x| < R$.

För överskådlighetens skull förbereder vi beviset med två hjälpsatser.

.I.1 Lemma. *Låt sviten $p(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ ges av ett polynomuttryck i n (omsider, dvs. för $n \geq n_0$). Då är även serien*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p(n) a_n x^n$$

absolutkonvergent för $|x| < R$. Samma gäller förstås för serien

$$\sum_{n=k}^{+\infty} p(n) a_n x^{n-k}$$

(där vi alltså tagit bort de k första termerna och dividerat de återstående med x^k).

Vi kommer att använda satsen specifikt för polynomen

$$p(n) = n \text{ samt } p(n) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

och $k = 1$ resp. $k = 2$.

Bevis: Bevisiden är denna: vi kan inte jämföra termerna direkt, ty jämförelsen går åt fel håll. Vår härledda serie har)åtminstone för stora n) absolutstörre termer än den givna, för fixt x. Men vi är i det inre av konvergensintervallet. Vi får en jämförelse åt rätt håll genom att sätta in ett större x–värde i den givna serien.

Ge således $x, 0 < |x| < R$. Välj r sådant att $|x| < r < R$, t ex medelvärdet av $|x|$ och R. Speciellt gäller att $\sum |a_n| r^n$ är konvergent.

Vi får då

$$|a_n r^n| = |a_n| (\frac{r}{|x|})^n |x|^n > |a_n||p(n)||x|^n$$

omsider. Ty exponentialfaktorn med bas $r/|x| > 1$ besegrar omsider polynomfaktorn i sista ledet.

Konvergensen av $\sum |a_n| r^n$ tvingar därmed den påstådda konvergensen av $\sum |a_n p(n) x^n|$.

∎

Speciellt vet vi nu att den termvis deriverade serien $\sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1}$ är absolutkonvergent för $|x| < R$.

Anm.: Utanför konvergensintervallet går termerna i $\sum_n a_n x^n$ inte ens mot noll. De är inte ens begränsade. Se beviset hos Neymark.

Desto värre är det då med serien $\sum p(n) a_n x^n$; dvs. ovanstående lemma kan kompletteras med iakttagelsen att de båda potensserierna har *samma* konvergensradie.

En handviftning av ovanstående sats är följande: i det inre av konvergensintervallet går termerna (minst) exponentiellt mot noll då $n \to +\infty$. Jag hänvisar återigen till Neymarks bevis. En polynomfaktor (i n) kan inte påverka detta faktum.

.I.2 Lemma. *Låt $n \geq 2$ vara ett heltal, x, h reella. Då gäller*

$$|\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n x^{n-1}| \leq |h| \binom{n}{2} (|x| + |h|)^{n-2}$$

Uttrycket i beloppstecken är skillnaden mellan en differenskvot för funktionen x^n och samma funktions derivata. Uppskattningen i högerledet ger alltså ett mått på hur stort glappet är mellan differenskvoten och dess gränsvärde.

Beviset nedan är kort men förutsätter Taylors formel. Ett mer elementärt, men aningen tekniskt, bevis föreslås som övning 0 nedan.

Bevis: Vi taylorutvecklar $f(x) = x^n$, till grad 1, vid x (med variabeltillskottet h). Restterm på Lagrangeform.

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x + \theta h)$$

Här är, som vanligt, θ ett tal strikt mellan noll och ett. Med f:s uttryck insatt blir detta:

$$(x+h)^n - x^n = h n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h^2 (x + \theta h)^{n-2}$$

Triangelolikheten ger $|(x+\theta h)^{n-2}| \leq (|x|+|h|)^{n-2}$, så överflyttning av första termen från högerledet, samt division med h, ger genast resultatet. ▮

Nu kommer den utlovade satsen

.I.3 Sats. *Låt $s(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$, med positiv (eller oändlig) konvergensradie vara given. Bilda den termvis deriverade serien $t(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ (vars konvergens för $|x| < R$ redan visats). Då gäller, för $|x| < R$, att $s(x)$ är deriverbar, med*

$$\frac{ds}{dx} = t(x)$$

Bevis:

Fixera x, $|x| < R$. Låt vidare $h \neq 0$, med $|x| + |h| < R$,

$$\frac{1}{h}[s(x+h) - s(x)] - t(x)$$

Vi ska visa att detta uttryck går mot noll då $h \to 0$.

Vi kan anta $|x| + |h| \leq r < R$, för lämpligt fixt $r, |x| < r < R$. Vi är ju bara intresserade av h–värden nära noll. Skillnaden ovan är en konvergent funktionsserie med n–e term

$$b_n(x) = a_n[\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - nx^{n-1}]$$

Lemma I.2. visar att

$$|b_n(x)| \leq |h| \cdot |a_n| \binom{n}{2} (|x| + |h|)^{n-2} \leq |h||a_n \binom{n}{2} r^{n-2}|$$

så

$$\left| \frac{1}{h}[s(x+h) - s(x)] - t(x) \right| \leq |h| \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} |a_n| \binom{n}{2} r^{n-2}$$

Den numeriska serien i högerledet är konvergent enligt Lemma I.1. Faktorn h går mot noll. Vänsterledet går alltså mot noll, precis som vi ville.

▮

Derivation en gång ger ny potensserie med samma positiva konvergensradie. Alltså kan man derivera en gång till, termvis, osv. Vips inser vi att summafunktionen är *obegränsat* deriverbar.

Satsen om termvis derivation ger oss nu, som korollar, att koefficienterna i en potensserie är entydigt bestämda av summafunktionen

.I.4 Följdsats. *Anta $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ med positiv (eller oändlig) konvergensradie R. Det gäller att*

$$a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}$$

Bevis: Om man deriverar summan $s(x)$ n gånger så erhåller man en potensserie med konstantterm $n! \cdot a_n$. Insättning av $x = 0$ ger $s^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$.

▮

.I.5 Exempel: Minns den geometriska seriens summa:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}; \quad |x| < 1$$

Termvis derivation ger då:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}; \quad |x| < 1$$

Vi kunde låta summationen börja vid noll, istället för ett, eftersom vi då bara lägger till en nolla. Dock har derivatan av en konstant inget med en negativ potens att göra, så det skulle se konstigt ut med den extra termen.

▮

Vi har alltså visat att den termvis deriverade och den ursprungliga serien har samma konvergensradie, samt att den förra verkligen framställer den senares derivata. Det är nu en smal sak att vända hela resonemanget. Vi har alltså följande sats om *termvis integration.*

.I.6 Sats. *För $|x| < R$ gäller*

$$\int_0^x \Big(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\Big) dt = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

.I.7 Exempel: Vi vet redan att

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

för $|x| < 1$. Ur detta kan vi härleda alla summor av typen

$$\sum_{n\geq 0} p(n)x^n$$

där p är ett polynom. För t ex $p(n) = n^2$ gör vi omskrivningen

$$n^2 = n(n-1) + n$$

Den andra termen bidrar

$$\sum_{n\geq 0} nx^n = x\sum_{n\geq 1} nx^{n-1} = x\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Den första bidrar på liknande sätt (övning!)

$$\sum_{n\geq 0} n(n-1)x^n = \sum_{n\geq 2} n(n-1)x^n = x^2\cdot\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2} =$$

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n\geq 0} x^n =$$

$$x^2\frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{1-x} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

Totalt:

$$\frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

▮

Genom att uttrycka d–egradspolynomet $p(n)$ (successivt) i *fallande potenser*

$$n(n-1)\cdots(n-d+1), \qquad n(n-1)\cdots(n-d+2), \qquad n(n-1)\cdots(n-d+3), \ldots,$$

kan man på detta vis summera alla serier av modellen $\sum p(n)x^n$ inom intervallet $|x| < 1$.

En annan typ man kommer åt är

$$\sum \frac{p(n)x^n}{n!}$$

med oändlig konvergensradie

.I.8 Exempel: Med samma omskrivning som ovan erhåller vi

$$\sum_n \frac{n^2x^n}{n!} = \sum_{n\geq 2}\frac{n(n-1)}{n!}x^n + \sum_{n\geq 1}\frac{n}{n!}x^n$$

$$= \sum_{n\geq 2}\frac{x^2x^{n-2}}{(n-2)!} + \sum_{n\geq 1}\frac{x\cdot x^{n-1}}{(n-1)!} =$$

$$x^2\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} + x\cdot\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{n!} =$$

$$= x^2e^x + xe^x$$

▮

Övningar

.0 Härled uppskattningen i Lemma I.2. genom att begagna binomialsatsen och bryta ut en lämplig faktor ur binomialkoefficienterna.

.1 Visa att

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = s(x)$$

genom att först visa att serien har oändlig konvergensradie, därpå att $s'(x) = s(x), s(0) = 1$.

Visa sedan att $s(x)s(-x) = 1$ (derivation visar först att uttrycket är konstant); samt att $s(x+a) = s(a)s(x)$ genom att lösa ekvationen $y'(x) = y(x), y(0) = s(a)$ medels integrerande faktor.

.2 Visa att $y(x) = \sin x$ ges av sin Maclaurin-serie (med oändlig konvergensradie) genom att visa att serien satisfierar $s''(x) + s(x) = 0$, $s(0) = 0$, $s'(0) = 1$.

.3 Behåll endast de termer i exponentialserien vilkas grad är jämn, stryk resten. Härled en andra ordningens differentialekvation för denna summa och bestäm den härur (eller på annat sätt).

.4 Samma uppgift som .3, men behåll nu de termer vilkas gradtal är delbara med 3.

.5 Gör om det sista exemplet ovan genom att visa att summan är $x\frac{d}{dx}xe^x$.

.II Taylorserier

Alla de kända ändliga McLaurinutvecklingarna har oändliga motsvarigheter. Man stryker helt enkelt resttermen och summerar till oändligheten. En del av de kända serierna får då oändlig konvergensradie, andra får konvergensradien ett.

.II.1 Exempel:

Först ut på plan är kungen bland funktioner, exponentialen. Från envariabelanalysen känner du igen utvecklingen

$$f(x) = e^x = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} + R_{N+1}(x) = s_N(x) + R_{N+1}(x)$$

där resttermen, på Lagrangeform, är

$$R_{N+1}(x) = f^{(N+1)}(\theta x)\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}, \quad 0 < \theta < 1$$

Nu är alla derivator av e^x lika med e^x. Det betyder att den första faktorn är $e^{\theta x}$. Den kan således, för positiva x, majoreras med e^x och, för negativa x, med 1. För fixt x kan alltså denna faktor majoreras med någonting som inte beror på n.

Den andra faktorn går då, återigen för fixt x, mot noll då $N \to +\infty$. Det är ett känt standardgränsvärde i envariabeln; fakulteten i nämnaren växer fortare än alla exponentialfunktioner (i N). Vi har visat att $R_{N+1} \to 0$ då $N \to +\infty$.

Vi låter nu $N \to +\infty$ i ekvationen

$$s_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} = e^x - R_{N+1}(x)$$

och erhåller

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

▮

Ett alternativt sätt att visa denna serieutveckling har skissats i övningarna. Man visar först att serien i vänsterledet har oändlig konvergensradie. Därpå härleder man differentialekvationen $s'(x) = s(x), \quad s(0) = 1$, som är entydigt lösbar med lösningen $s(x) = e^x$.

.II.2 Exempel:

Det som sagts om e^x gäller även $\sin x$ och $\cos x$. T ex är

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

med oändlig konvergensradie. Man kan visa även detta på två sätt; antingen genom uppskattning av lagrangetermen, eller genom en differentialekvation. Det senare föreslås i en tidigare övning.

∎

För arcustangens och logaritm gäller att de oändliga taylorserierna har konvergensradie ett. En och annan minns att resttermen för arcustangens är lite klurig. Den är nästintill omöjlig att bestämma ur det allmänna uttrycket (eftersom derivatorna efterhand blir horribla). Man använder tricket att integrera en enklare utveckling.

Men med oändliga serier blir det riktig smidigt!

.II.3 Exempel:

Vi utgår från den geometriska serien

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

Dess konvergensradie är 1. Konvergensområdet är det öppna intervallet $|t| < 1$

I denna serie sätter vi in $t = -u^2$:

$$\frac{1}{1+u^2} = 1 - u^2 + u^4 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u^{2n}$$

Den har naturligtvis också konvergensradie 1. Detta går förresten inte att fastställa direkt med kvot- eller rotformeln, eftersom inget av de däri ingående gränsvärdena existerar.

Denna geometriska serie integrerar vi nu från 0 till x, $|x| < 1$. En tidigare sats utlovar att integrationen kan utföras termvis och att den nya serien också har konvergensradie 1:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Här inträffar det intressanta att serien uppfyller förutsättningarna för Leibniz' kriterium för alla x, med $|x| < 1$. Dvs. termernas tecken alternerar och deras belopp går monotont mot noll. Redan täljarna avtar och den extra faktorn i nämnaren endast förstärker detta faktum.

Detta hjälper oss inte med konvergensen för $|x| < 1$, som vi ju visste ändå.

(Vi får förstås konvergens även för $x = \pm 1$ vilket dock inte är så användbart. Dels framgår inte av våra bevis att serien konvergerar mot $\arctan \pm 1$ i ändpunkterna. Dels är konvergensen för långsam. I konvergensintervallets ändpunkter beter sig termerna *aldrig* exponentiellt !!!)

Men en elementär följd av själva beviset (se Neymark) är att resttermen (till beloppet) kan överskattas med den första däri ingående termen. För en Leibnizserie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$$

gäller att

$$|\sum_{n=N+1}^{\infty}(-1)^n a_n| \leq a_{N+1}$$

För vår speciella serie gäller således:

$$|\arctan x - \sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}| =$$

$$|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}| \leq |\frac{x^{2N+3}}{2N+3}|$$

för $|x| < 1$

▮

.II.4 Exempel: Logaritmen, som ju också är integralen av en geometrisk serie, är lite krångligare. Genom integration av

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots, \quad |t| < 1$$

från 0 till x erhåller vi

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1$$

Uppförandet för positiva x exemplifierar vi med $x = 1/2$:

$$\ln 2 = -\ln(1 - \frac{1}{2}) = \sum_{n \geq 1} \frac{(1/2)^n}{n}$$

Om vi avbryter summationen vid $n = 10$ får vi resttermen

$$\sum_{n \geq 11} \frac{(1/2)^n}{n} \leq \frac{1}{11} \sum_{n \geq 11} (1/2)^n = \frac{1}{11} \cdot \frac{(1/2)^{11}}{1 - 1/2} < \frac{1}{10}(1/2)^{10} < 1 \cdot 10^{-4}$$

Partialsumman

$$\sum_{n \geq 1}^{10} \frac{(1/2)^n}{n}$$

ger oss alltså $\ln 2$ med tre korrekta decimaler ($= 0.693$).

▮

För negativa värden på x, alltså $-1 < x < 0$, är logaritmserien en Leibnizserie. Resttermen kan alltså uppskattas på samma sätt som för arcustangens.

Om man uttrycker resttermen slaviskt enligt Lagranges formel får man en dålig feluppskattning för $x = 1/2$. För $x > 1/2$ visar sig den enda lätt åtkomliga upskattningen gå mot oändligheten med antalet termer! Serier är *bra*.

.II.5 Differentialekvationer

När man inte kommer på något annat kan potensserieansatser ge användbara lösningar till differentialekvationer. Är man - med marginal - inuti konvergens-intervallet kan lämpliga partialsummor ge goda approximationer.

Vi ger ett exempel där vi dock kan bestämma lösningen på annat sätt: *Lös, i en omgivning av noll*, differentialekvationen

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = 2 \cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

Vi ansätter en potensserielösning:

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

där tydligen $a_0 = y(0) = 1$. Vi har

$$(1-x)\frac{dy}{dx} = (1-x)(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots) =$$

$$= a_1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - 2a_2)x^2 + (4a_4 - 3a_3)x^3 + \ldots$$

i den mån serien alls konvergerar (med positiv konvergensradie). Detta ska stämma överens med

$$2y(x) = 2a_0 + 2a_1 x + 2a_2 x^2 + 2a_3 x^3 + \ldots$$

Eftersom koefficienterna är entydigt bestämda kan vi identifiera:

$$\begin{aligned}2a_0 &= a_1\\ 2a_1 &= 2a_2 - a_1\\ 2a_2 &= 3a_3 - 2a_2\\ 2a_3 &= 4a_4 - 3a_3\\ \ldots &= \ldots\end{aligned}$$

varur:

$$\begin{aligned}2a_0 &= a_1\\ 3a_1 &= 2a_2\\ 4a_2 &= 3a_3\\ 5a_3 &= 4a_4\\ \ldots &= \ldots\end{aligned}$$

Vi erhåller

$$\begin{aligned} a_1 &= 2a_0 = 2 \\ a_2 &= \frac{3}{2}a_1 = 3 \\ a_3 &= \frac{4}{3}a_2 = 4 \\ a_4 &= \frac{5}{4}a_3 = 5 \\ \ldots &= \ldots \end{aligned}$$

Mönstret är klart och vi erhåller $a_n = n+1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$ En potensserielösning är alltså

$$y(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n$$

med konvergensradie 1. Du känner säkert igen den som den deriverade geometriska serien

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Den givna ekvationen kunde naturligtvis också ha behandlats som en vanliga separabel differentialekvation.

.II.6 Exempel: En integral

Vi söker integralen

$$I = \int_0^1 e^{-x^2}dx$$

med tre korrekta decimaler. Till den änden taylorutvecklar vi integranden. Vi vet att

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^5}{5!} + \ldots$$

med oändlig konvergensradie. I denna serie sätter vi in $t = -x^2$:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \ldots$$

Termvis integration från noll till ett ger oss

$$I = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \ldots$$

Detta är uppenbarligen en Leibnizserie med allmän term

$$(-1)^n\frac{1}{(2n+1)\cdot n!}; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Vi har redan sett att om vi avbryter summationen vid $n = N-1$ så kan resttermen uppskattas med beloppet av nästföljande term, som är $1/((2N+1)\cdot N!)$. Vi ska alltså välja N så att $1/((2N+1)\cdot N!) < 0.0005$. Vi prövar oss fram i steg och finner, för $N = 6$ att $1/(13\cdot 6!) < 0.0002$. Vi ska alltså summera till $N = 5$ och erhåller, med tre decimaler:

$$I \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.747$$

Vi kan klara även lite större värden i övre gränsen, men serien är då kanske inte Leibniz meddetsamma.

▮

Övningar

.1 Beräkna $\arctan(1/2)$ med fyra korrekta decimaler (dvs. felet ska vara $< 5\cdot 10^{-5}$)

Använd räknedosa (eller ngt datorprogram) för de rationella operationerna, och jämför svaret med dess standardfunktion

.2 Härled Taylorserien för $\ln(1+x)$,$|x| < 1$, ur det näst näst sista exemplet ovan.

Ange också utvecklingen av

$$\ln\frac{1+x}{1-x}$$

(som är den verkligt användbara för numeriska beräkningar). Föreslå lämplig uppskattning av resttermen. Visa nu att man kan beräkna $\ln 2$ med fyra korrekta decimaler med hjälp av endast fem termer.

.3 Vi vill beräkna π. Det är frestande, men opraktiskt, att sätta in $x = 1$ i utvecklingen för $\arctan x$. Dels har vi inte visat att serien konvergerar mot $\arctan x$ även på randen (vilket den gör). Dels konvergerar den erhållna serien alldeles för långsamt.

Visa först, istället att

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}$$

Använd sedan de ovan erhållna uttrycken för resttermen till att bestämma π med fyra korrekta decimaler.

.4 Anta att exponentialfunktionen *definieras* genom sin Taylor-serie. Använd denna till att bekvämt bevisa att e^x är större än alla sina ändliga taylorutvecklingar för positiva värden på x. Visa, lika bekvämt, att

$$\frac{e^x}{x^n} \to +\infty \qquad (n \in \mathbf{Z}_+)$$

då $x \to +\infty$.

.5 Vi vill bestämma $\ln 10$ med fyra korrekta decimaler. Hur många termer leds du till genom insättning av lämpligt x i utvecklingen av $-\ln(1-x)$? Hur blir det om du utnyttjar $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$. Kan du förbättra ytterligare?

.6 Beräkna

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

med två korrekta decimaler.

.7 Lös differentialekvationen

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\cdot y(x), \quad y(0) = 1$$

med hjälp av potensserier. Konvergensradie?

.8 Lös differentialekvationen

$$4xy'' + 2y' - y = 0, \quad y(0) = 1$$

med potensserier. Konvergensradie? Kan du finna ett elementärt uttryck?

.9 Repetera (vid behov) den ändliga MacLaurinutvecklingen av $(1+x)^{\frac{1}{2}}$. Ta för givet eller visa (t ex genom att lösa upgift 6) att funktionen ges av motsvarande oändliga serie för $|x| < 1$. Verifiera också att denna är Leibniz för positiva x. Använd detta till att beräkna $\sqrt{17}$ med två korrekta decimaler.

Kontrollera med räknedosans standardfunktion. Du får gärna räkna ut bättre approximationer.

.III Absolutkonvergens och Cauchymultiplikation

.III.1 Omsummation

Absolutkonvergenta serier är ytterst slagtåliga.

.III.2 Sats. *Låt $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ vara absolut konvergent och låt serien $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ uppstå genom omordning av dess termer. Då är även den nya serien absolutkonvergent, med samma summa som den gamla.*

Bevis: Absolutkonvergens är inget problem. Om

$$\sum |a_n| = S$$

så är alla partialsummor till $\sum |b_n|$ begränsade av S.

Nu till summan. Vi behandlar först fallet att serien är positiv, alla $a_n \geq 0$.

Ge godtyckligt icke-negativt heltal N. För tillräckligt stort $M \geq N$ finns alla termerna $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_N$ med bland termerna $b_0, b_1, \ldots, b_M$ (jämte andra positiva termer). Så vi har

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n \leq T_M := \sum_{m=0}^{M} b_m$$

För ett ännu större heltal P erhåller vi på samma sätt:

$$S_N \leq T_M \leq S_P$$

Låter vi nu $N \to +\infty$ går ytterleden mot

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Mellanledet går mot

$$T = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m$$

och instängningsprincipen ger då

$$S = T$$

I fallet att termerna a_n har växlande tecken, och serien $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ konvergerar, kan vi dela upp termerna i *positiv och negativ del*:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|) - \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) =: p_n - q_n$$

Nu är serierna $\sum p_n$ och $\sum q_n$ varförsig positiva och konvergenta - de majoreras av $\sum |a_n|$ - och kan alltså omsummeras godtyckligt, med oförändrad summa, enligt det föregående fallet. Således gäller detsamma om serien $\sum a_n$.

Om, tillsist, serien är komplex, så medför absolutkonvergens att serien av termernas realdelar, och serien av dess imaginärdelar, varförsig är absolutkonvergenta. Ty båda majoreras av termernas belopp. Så vi är genast tillbaka i det förra fallet.

∎

För betingat konvergenta serier gäller tvärtom, enligt en sats av Riemann, att de kan omsummeras till vilken summa som helst.

.III.3 Cauchymultiplikation

Låt

$$\sum_n \alpha_n; \qquad \sum_n \beta_n$$

vara absolutkonvergenta serier med

$$\sum_0^{+\infty} |\alpha_n| = A, \qquad \sum_0^{+\infty} |\beta_n| = B$$

så att

$$\sum_0^{N} |\alpha_n| \leq A, \qquad \sum_0^{N} |\beta_n| \leq B$$

för alla positiva heltal N.

Betrakta en ändlig mängd av produkter $\alpha_j \beta_k$. Låt N vara större än alla förekommande j och k.

Då gäller att

$$|\sum_{\text{vissa } j.k} \alpha_j \beta_k| \leq \sum_{\text{vissa } j.k} |\alpha_j \beta_k| \leq$$

$$\sum_0^N |\alpha_n| \cdot \sum_0^N |\beta_n| \leq AB$$

så hur vi än ordnar dessa produkter på rad och summerar får vi en absolutkonvergent serie och summan S blir densamma, oberoende av summationsordningen.

Betraktar vi nu indexparen (j,k) som punktkoordinater i första kvadranten ger sig två summationsordningar naturligt:

Summation över kvadrater

Vi kan, för givet N, summera alla de termer för vilka både $j,k \leq N$. De bildar en kvadrat och innehåller $(N+1)^2$ termer. Vi erhåller summan

$$S_N = \sum \sum_{0 \leq j,k \leq N} \alpha_j \cdot \beta_k = \sum_{j=0}^{N} \alpha_j \cdot \sum_{k=0}^{N} \beta_k$$

Låter vi $N \to +\infty$ erhåller vi

$$S = \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j \sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k$$

dvs. produkten av de båda seriernas summor.

Summation över trianglar

Vi kan också summera över triangeln med hörn i $(0,0),(N,0),(0,N)$ och låta $N \to +\infty$.

Inom triangeln summerar vi lämpligen på linjer med lutning -1, dvs. med fix indexsumma $j+k=n$, $n=0,1,\ldots,N$. Därpå summerar vi resultaten över indexsumman n.

Vi erhåller

$$T_N = \sum_{n=0}^{N} (\sum_{j+k=n} \alpha_j \beta_k)$$

där den inre summan är $\alpha_0\beta_n + \alpha_1\beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n\beta_0$, med $n+1$ termer.

I limes erhålles:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{j+k=n} \alpha_j \beta_k)$$

som alltså också, enligt förra stycket, är produkten av de båda seriernas summor.

Detta är speciellt trevligt om båda serierna är potensserier $\alpha_j = a_j x^j$, $\beta_k = b_k x^k$. Då innebär den inre summan att vi slår ihop alla termer av samma grad, precis som om vi haft polynom istället för serier:

$$\alpha_j \cdot \beta_k = a_j b_k x^{j+k} = a_j b_k x^n$$

Vi måste bara, för absolutkonvergens, hålla oss i det inre av båda konvergensintervallen.

Detta summationssätt kallas *Cauchymultiplikation*.

.III.4 Exempel:

Genom derivation av serien

$$\frac{1}{1-x} = \sum_n x^n, \qquad |x| < 1$$

erhåller vi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Vi kan nu utveckla $1/(1-x)^3$ på två sätt. Vi kan derivera en gång till:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}D\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)nx^{n-1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)x^n$$

Men vi kan också multiplicera ihop den geometriska serien och dess derivata. I den första av dem har vi

$$\alpha_n = x^n,$$

i den andra är

$$\beta_n = (n+1)x^n$$

så

$$\sum_{j+k=n}\alpha_j\beta_k = \sum_{j+k=n} x^j\cdot(k+1)x^k = x^n\sum_{k=0}^{n}(k+1)$$

Så

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n(\sum_{k=0}^{n}k+1)$$

Derivationen ger oss koefficenterna på sluten form, multiplikationen ger oss dem som summor.

Nu är koefficienterna i en potensserie entydigt bestämda av summafunktionen, enligt Korollar I.4. Så vi kan identifiera koefficienter till samma grad:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} = \sum_{k=0}^{n}(k+1) = 1+2+\ldots(n+1)$$

Vi har återupptäckt den aritmetiska summan. ∎

.III.5 Genererande funktioner

Vi går direkt på ett exempel.

.III.6 Exempel: Lös rekursionen

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

där a_0, a_1 är givna.

Problemet är entydigt lösbart. Vi kan bestämma $a_2, a_3, a_4, \ldots$ successivt genom insättning av föregående a:n i formeln. Det är bra, ty om vi kan bluffa fram, och verifiera, en lösning, så är vi klara

Vi bildar den sökta följdens *genererande funktion*,

$$G(x) = \sum_n a_nx^n$$

Vi bryr oss tills vidare inte om hur och var den konvergerar.

Vi multiplicerar nu rekursionen med x^{n+2} och summerar:

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+2}x^{n+2} - 3x\sum_{n\geq 0} a_{n+1}x^{n+1} + 2x^2\sum_{n\geq 0} a_n x^n = 0$$

En stunds eftertanke ger ur detta:

$$G(x) - a_0 - a_1 x - 3x(G(x) - a_0) + 2x^2 G(x) = 0$$

Vi ignorerar tills vidare begynnelsevärdena och skriver

$$(1 - 3x + 2x^2)G(x) = Ax + B; \qquad G(x) = \frac{Ax + B}{(1 - 3x + 2x^2)} = \frac{Ax + B}{P(x)}$$

Eftersom vi vill kunna utveckla i geometriska serier delar vi upp högerledet i partialbråk av typen $1/(1 - a_i x)$ där tydligen a_i:na är de inverterade rötterna till $P(x) = 0$. Det är lätt att bestämma dem till $1, 2$. Så:

$$G(x) = \sum_n a_n x^n = \frac{C}{1 - x} + \frac{D}{1 - 2x} = \sum (C \cdot 1^n + D \cdot 2^n)x^n$$

Den andra termen fick vi genom att byta x mot $2x$ i den geometriska serien. Konvergensradien är $1/2$. Vi väntar med att bestämma C och D.

Så vi får

$$a_n = C + D2^n$$

där C, D kan bestämmas genom insättning av $n = 0, 1$:

$n = 0$ ger $a_0 = C + D$, $a_1 = C + 2D$, så vi löser detta lilla ekvationssystem och erhåller: $C = 2a_0 - a_1$, $D = a_1 - a_0$

▮

Strukturen är precis som för en andra ordningens differentialekvation: lösningen blir en lineärkombination av (diskreta) exponentialfunktioner (om polynomet P har enkelrötter). Skulle P ha exempelvis en dubbelrot bidrar denna ett förstagradsuttryck i n gånger en exponentialfunktion, osv., osv.

Eftersom vi var tvungna att invertera P:s rötter är det *reciproka polynomet*

$$Q(x) = x^2 P(1/x) = x^2 - 3x + 2$$

med gradtalen i omvänd ordning, det relevanta. Q kallas rekursionens karakteristiska polynom och analogin med differentialekvationer är nu hur klar som helst.

I Kretsteorin tycker de inte om att invertera saker så de arbetar istället direkt med följdens *z-transform* som är $G(1/z)$, dvs. vi byter x mot $1/z$ (varvid konvergensområdet blir området *utanför* ett symmetriskt intervall).

De relevanta partialbråken är då

$$\frac{1}{(1-a/z)^k} = \frac{z^k}{(z-a)^k}$$

där a är rot till karakteristiska polynomet.

Den genererande funktionen, med positiv konvergensradie, gav oss verkligen en lösning (och den är lätt att verifiera) så vi behöver inte leta längre. Egentligen är frågan om konvergens *totalt* ointressant. Man kan nämligen arbeta med genererande serier som helt formella objekt vilka uppfyller vissa räkneregler. x är då bara en symbol. Koefficienterna kan också få vara komplexa, utan vidare bekymmer.

.IV Fler genererande serier

Vi härleder nu i rask följd de genererande serier som behövs för att lösa lineära rekursioner.

Vi utgår från den redan kända

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n$$

med konvergensradie 1. I konvergensintervallets inre kan vi derivera termvis. Vi gör det två gånger, sen ska nog mönstret synas.

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} n \cdot x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) \cdot x^n$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n\geq 2} n(n-1) \cdot x^{n-2} = \sum_{n\geq 0} (n+2)(n+1) \cdot x^n$$

Observera att gradtalet (-2) dyker upp i täljaren; men dess tecken tas ut av inre derivatan -1, från $-x$ i nämnaren. Observera också att vi i mellanleden låter summationen börja med $n = 1$ resp. $n = 2$ för att slippa förfulande negativa potenser (med koefficient noll, förvisso).

Upprepning ger:

$$\frac{d!}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{n\geq d} n(n-1)\cdots(n-d+1) \cdot x^{n-d} = \sum_{n\geq 0} (n+d)(n+d-1)\cdots(n+1) \cdot x^n$$

Det kan vara praktiskt att dividera båda leden med $d!$:

$$\frac{1}{(1-x)^{d+1}} = \sum_{n\geq d} \binom{n}{d} \cdot x^{n-d} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+d}{d} \cdot x^n,$$

där alla likheter gäller för $|x| < 1$. Vi kan här byta ut x mot ax och får, för $|x| < 1/a$:

$$\frac{1}{(1-ax)^{d+1}} = \sum_{n\geq d} \binom{n}{d} \cdot a^{n-d} x^{n-d} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+d}{d} \cdot a^n x^n,$$

Den första likheten multiplicerar vi gärna med x^d:

$$\frac{x^d}{(1-ax)^{d+1}} = \sum_{n\geq d} \binom{n}{d} \cdot a^{n-d} x^n$$

.IV.1 Summation

I avsnitt III.4. härledde vi den aritmetiska summan på en lite lustig omväg. Principen är dock mycket användbar. Vi vill hitta uttryck för summorna

$$\sum_{j=0}^{n} a_j$$

där $a_0, a_1, a_2, \ldots$ är en given talföljd. Vi antar att följden är exponentiellt begränsad, $|a_j| \leq K \cdot \lambda^j$ där K och λ är positiva konstanter. Villkoret garanterar att potensserien

$$s(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j$$

har positiv konvergensradie R ($\geq 1/\lambda$). Vi låter r vara mindre än både R och 1.

Vi betraktar även den geometriska serien

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k, \quad |x| < 1.$$

där alla $b_k = 1$

I avsnitt III.3 visade vi att

$$s(x) \cdot \frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j x^j \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n, \quad |x| < r$$

där

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots a_n b_0$$

som i vårt fall är den sökta summan

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

Vi erhåller alltså en genererande funktion för dessa summor genom att multiplicera den givna svitens genererande funktion med $1/(1-x)$.

.IV.2 Exempel:

I Exempel I.6. visade vi att

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 x^k = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$$

med konvergensradie 1. Vi vill bestämma summorna $c_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$. Vi har visat att

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \frac{x + x^2}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x} = \frac{x + x^2}{(1-x)^4}, \quad |x| < 1$$

Vi använder nu den tidigare härledda formeln

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+3}{3} x^n$$

varur:

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)^4} &= \sum_{n\geq 0} \binom{n+3}{3} x^{n+1} = \\ &= \sum_{n\geq 1} \binom{n-1+3}{3} x^n = \\ &= \sum_{n\geq 0} \binom{n+2}{3} x^n\end{aligned}$$

och, på samma sätt:

$$\frac{x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n\geq 0} \binom{n-2+3}{3} x^n$$

Så

$$c_n = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3,} = \frac{1}{6}(n+1)n(2n+1), \quad n \geq 0$$

Kontrollera några låga värden på n!

Övningar

.0 Vi vill summera serien

$$\sum_n \frac{n^3}{n!} x^n$$

Visa att det går lätt om man först skriver n^3 som lineärkombination

$$n(n-1)(n-2) + bn(n-1) + cn$$

Vad kan allmänt sägas om summan, med k iställetför 3?

.1 Lös

$$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0, \quad a_0, a_1 \text{ givna}$$

.2 Samma uppgift för

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, \quad a_0 = a_1 = 1$$

.3 Lös den inhomogena rekursionen

a)

$$a_{n+1} - 2a_n = 3^n, a_0 = 0$$

t ex, m h a genererande serier.

b)

$$a_{n+1} + 2a_n = 2^n, a_0 = 0$$

c)

$$2a_{n+1} + a_n = 2^n, a_0 = 0$$

.4 Lös ekvationen

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + n; \quad n \geq 1; \quad a_0 = 0$$

Tips: skriv upp samma rekursion med n utbytt mot $n+1$ och subtrahera därpå de båda ekvationerna ledvis.

.5 Definiera

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

Vad är konvergensradien? Verifiera

$$e^x \cdot e^y = e^{(x+y)}$$

Vad händer, om du med potensserier försöker verifiera $2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$

.6 Bernoulli-talen B_i definieras rekursivt enligt

$$B_0 = 1; \quad \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i = 0$$

Bestäm den genererande funktionen $\sum_0^{+\infty} A_j x^j$ för följden $A_j = B_j / j!$. Kalla den $V(u)$. Verifiera att

$$V(u) + \frac{u}{2}$$

är jämn så att många av Bernoullitalen måste vara noll (ett litet trick behövs).

Är du bra på att arbeta komplext kan du också vilja härleda Taylorserien för $\tan x$, genom en substitution.

.7 d, n är heltal ≥ 0. Vi vill bestämma $N(d, n)$ som är antalet lösningar i heltal ≥ 0 till ekvationen

$$n_0 + n_1 + n_2 + \ldots + n_{d-1} + n_d = n$$

T ex är $N(0, n) = 1$. En lösning är att bestämma genererande funktionen $s_d(x) = \sum_{n \geq 0} N(n, d) x^n$, där alltså $d \geq 0$ är fixt, och avläsa dess koefficienter.

Börja med att övertyga dig om att

$$\sum_{k=0}^{n} N(d-1, k) = N(d, n), \quad d \geq 1$$

och härled härur ett samband mellan $s_d(x)$ och $s_{d-1}(x)$. När du har svaret på sluten form kan du vilja fundera över en kombinatorisk lösning. Eller innan!

.V Matrisexponentialen e^{At}

Detta avsnitt hör inte till analys-kursen. Jag har skrivit ut det för dess obestridliga referensvärde i samband med sådana tillämpningar som Reglerteknik och Mekanik.

Referenser förkommer ibland till mina fria böcker Kossan och Krypa-Gå. Det finns länkar till dem från min personliga hemsida.

Matrisexponentialen är en serie med matriskoefficienter:

$$e^{At} := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

där A är en komplex eller reell n/n-matris. Uppenbarligen är $e^{A0} = A^0 = E$.

Matriselementen är varförsig potensserier. Om dessa gäller

.V.1 Sats. *Matrisexponentialens element är n^2 stycken potensserier med oändlig konvergensradie.*

Bevis: Låt M vara en absolut övre begränsning för alla element i A. Man visar successivt att alla element i A^k begränsas av $M^k n^{k-1} \le (Mn)^k$.

Så varje element i matrisserien begränsas av

$$\frac{(Mnt)^k}{k!}$$

som är den allmänna termen i den absolutkonvergenta exponentialserien

$$e^{Mnt} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(Mnt)^k}{k!}$$

Dvs, matriselementen är absolutkonvergenta potensserier för godtyckligt t. ∎

Genom elementvis derivation följer då av föregående avsnitt

.V.2 Sats.

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A$$

Bevis:

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k A^k t^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1) A^{(k+1)} t^k}{(k+1)!}$$

$$A \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}$$

Utbrytning av A åt höger, ger p s s den andra likheten. ∎

Precis som i det skalära fallet gäller

.V.3 Sats. *Matrisexponentialen är inverterbar, med*

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}$$

samt

.V.4 Sats. *Differentialsystemet*

$$\frac{dX}{dt} = AX(t) \quad \text{där } X(t) \text{ är } n/1 \text{ eller } n/n, \quad X(0) \text{ given}$$

är entydigt lösbart, med lösningen

$$X(t) = e^{At}X(0)$$

Bevis: För beviset av den första satsen bildar vi

$$X(t) = e^{At}e^{-At}; \qquad X(0) = EE = E$$

Produktregeln för derivata ger:

$$X'(t) = Ae^{At}e^{-At} + e^{At}(-A)e^{At} = (A - A)X(t) = 0$$

eftersom e^{At} kommuterar med A. $X(t)$ är således konstant, $= X(0) = E$, vilket visar den första satsen.

För beviset av den andra bildar vi

$$X(t) = e^{-At}X(t)$$

och visar på samma sätt (övning) att $X(t)$ är konstant, $= X(0) = X(0)$. Multiplikation med e^{At} ger genast resultatet. ∎

Som en förberedelse till fortsättningen kan du vilja se igenom ett räkneexempel i Kossan, G.VIII.6.

Ett annat exempel förbereder vi med en sats i samma anda som de båda senaste.

.V.5 Sats. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ om $AB = BA$.

Bevis: Först konstaterar vi att förutsättningen medför $e^{At} \cdot B = B \cdot e^{At}$, eftersom exponentialfaktorn är en serie i A–potenser som alla kommuterar med B.

Matrisserierna $X(t) = e^{At}e^{Bt}$ samt $X(t) = e^{(A+B)t}$ visas sedan lätt uppfylla differentialekvationen

$$X'(t) = (A + B)X(t); \qquad X(0) = E$$

bägge två. Men denna ekvation är entydigt lösbar. ▮

Detaljerna är övning.

.V.6 Exempel: Låt oss beräkna

$$e^{At}, \text{ där } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E + N$$

där $N^2 = 0$. Den just visade satsen säger att

$$e^{At} = e^{Et}e^{Nt} = e^t E \cdot (E + Nt + \frac{1}{2}N^2t^2 + \cdots) = e^t(E + Nt) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

▮

.V.7 Allmänna vridningen (jfr Kossan, F.V.)

Från mekaniken känner du förhoppningsvis igen rotationsekvationen

$$\mathbf{r}'(t) = \omega \times \mathbf{r}(t)$$

(Alonso-Finn, sid. 82)

Här är ω rotationsaxeln och dess belopp lika med vinkelhastigheten. Vi antar att denna är lika med 1. Med

$$\omega = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3; \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$$

i högerorienterad ON-bas, och $\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}X(t)$ i samma bas, kan vi skriva ekvationen på matrisform

$$X'(t) = AX(t)$$

där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad A^3 = -A$$

vilket du bör kontrollera. Det sista sambandet är, om du vill, en följd av “de tre stegen” i Krypa-Gå, A.IV.4, eller K-G Andersson, s.47. A är en kryssprodukt, projektion följd av vridning 90 grader och sträckning faktorn 1. A^3 svarar på samma sätt mot projektion följd av vridning $3 \cdot 90$ grader.

Lösningen är

$$X(t) = e^{At}X(0)$$

så vi försöker summera exponentialserien. Denna sönderfaller behändigt i jämna och udda termer.

Vid summationen av de jämna termerna beaktar vi att $A^2 = -A^4 = A^6 \ldots$, så:

$$E + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \frac{A^6t^6}{6!} + \cdots =$$

$$E + A^2(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \cdots) =$$

$$E + (1 - \cos t)A^2$$

De udda termerna summerar sig analogt till

$$A(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots) = \sin tA$$

så

$$X(t) = e^{At}X(0) = [E + \sin tA + (1 - \cos t)A^2]X(0)$$

Vinkelhastigheten var 1. Så

$$\mathbf{r}(t) = \underline{\mathbf{e}}X(t)$$

ligger vriden vinkeln t, kring ω, i förhållande till

$$\mathbf{r}(0) = \underline{\mathbf{e}}X(0)$$

Matrisfaktorn i kantiga klamrar är alltså matrisen för denna vridning (i basen $\underline{\mathbf{e}}$) och kan tydligen erhållas helt utan basbyte. En mer direkt geometrisk förklaring ges i Kossans Underhållning F.V. Man kan visa att $\exp(At)$ alltid är ett polynom i A, av grad högst lika med $n-1$, och med variabla koefficienter. Det är Kossa G.X.4, med bevis.

Vi skriver om yttrycket ovan i vektorbeteckningar. Multiplikation med A betydde vektorprodukt med ω. Multiplikation med A^2 betyder att denna vektormultiplikation utföres två gånger, så

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \sin t\, \omega \times \mathbf{r}(0) + (1 - \cos t)\, \omega \times (\omega \times \mathbf{r}(0))$$

Här står sambandet mellan lägesvektorn vid tiden t, läget vid tiden 0, samt hastigheten (kryssprodukten) och accelerationen (trippelkryssprodukten) vid tiden 0.

Övningar

.1 Verifiera att vridningsmatrisen $X(t) = e^{At}$ ovan verkligen uppfyller $X'(t) = AX(t) = X(t)A$; $X(0) = E$

.2 Bestäm matrisen för vridning 120 grader kring $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$, höger-ON-bas.

.VI Facit till vissa uppgifter.

I.3. $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

I.4.

$$\frac{1}{3}(e^x + 2e^{-x/2}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x)$$

II.2. $2(x + x^3/3 + x^5/5 + x^7/7 + \ldots) = \sum_{n\geq 0} x^{2n+1}/(2n+1)$

II.5. 0.59

II.6.

$$(1+x)^{1/2}$$

. Konvergensradien är 1.

II.7. $y(x) = \sum_{k\geq 0} x^k/(2k!) = \cosh(\sqrt{|x|})$

II.8. Tips: $\sqrt{17} = 4(\sqrt{1 + 1/4})$

IV.0. $(x^3 + 3x^2 + x)e^x$

IV.1. $(a + bn)2^n$ där $a = a_0$, $b = -a_0 + (1/2)a_1$

IV.2. $\frac{1}{2}(\lambda_1^n + \lambda_2^n)$ där $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{5}/2$

IV.3.

a) $a_n = 3^n - 2^n$
b) $a_{2n+1} = 4^n; \quad , a_{2n} = 0$
c)

$$a_n = \frac{1}{5}(2^n - (\frac{-1}{2})^n)$$

IV.4. $a_n = 2^n - 1$

IV.6.

$$N(n,d) = \binom{n+d}{d} = \binom{n+d}{n}$$