Stringens och moral.

”Rigor is to the mathematician what morality is to man”. André Weil skrev så för c:a 50 år sen och det är tydligt att han talar om en analogi, om vad som håller samman och ger riktning, enhet, stadga och mening.

Under min snart avslutade karriär har jag ofta kommit att uppfatta mer än en analogi. Hur matematiken presenteras är i högsta grad en etisk fråga. Vill vi låta studenterna ana både djupet och enkelheten under den ibland lite avskräckande begreppsapparaten? Eller vill vi förvandla dem till sifferfurirer för vilka matematiken är en bijektion mellan uppgiftslydelser och armrörelser?

Läroböcker idag har ofta mycket vacklande ambitioner. I ena riktningen sopas härledningar fullkomligt godtyckligt under mattan, kanske för att författaren inte orkat tänka ut de mest direkta vägarna till resultaten.

I den motsatta riktningen finns tendensen att freda det onda samvetet genom att inbädda de mer triviala resultaten i en pompös begreppsapparat, när två, tre välvalda exempel eller specialfall hade avslöjat de teoretiska mekanismerna.

Typexempel på denna obalans är de läroböcker i lineär algebra som visar determinantens linearitetsegenskaper med induktionsbevis över två sidor, medan antisymmetriegenskaperna förblir ”beyond the scope of our presentation”. De senare blir nämligen alldeles för rörigt att utreda på grund av en ”underlättande” induktiv definition!

Ingen författare (utom min kollega U Janfalk) tycks känna till att G Shilov för över 40 år sedan anvisade en didaktiskt överlägsen presentation av permutationer och deras tecken med hjälp av “lutningar”, en ansats som förenklar determinanteorin i *alla* dess delar.

Stringens är inget absolut, inte ens på definitionsstadiet. Weil påpekar också att det inte handlar om att bevisa allting. Men jag har i decennier predikat att teorierna även för nybörjare måste föras på ett sådant sätt att luckorna är synliga och väl avgränsade, så de kan täppas i efterhand. Man kanske inte direkt ska införa reella tal som ekvivalensklasser av Cauchy-sviter; men man borde åtminstone diskutera betydelsen och behovet av ett kontinuitetsaxiom.

En diskussion kunde utgå från den vanliga föreställningen om reella tal som oändliga decimalbråk. En anmälare av Body and Soul- trilogin påpekade nyligen hur Johnsonligan misslyckats med att redogöra för *räkningen* med slika storheter.

Svårigheten är instruktiv. Varje försök att få rätsida på detta leder nämligen nästan ofelbart till Cauchysviter eller något liknande. Plötsligt förstår en och annan att en höjning av abstraktionsnivån kan vara motiverad och underlättande!

Sådana diskussioner väntar jag mig av textböcker. Annars är vi ju inte i närheten av en *definition* av de reella talen, och det är ju där stringensen börjar.

Vi förfasar oss gärna över att studenter ser definitioner som överkurs. När mina studenter ska lösa differentialsystem medels egenvektorer och egenvärden klagar de ofta att de inte vet vad de gör. Det är verkligen sant - när jag anvisar kontroller som borde förklara detta förstår de inte. De har inte gjort klart för sig vad en egenvektor är för något. De har härmat förfaranden.

Samtidigt kan man undra om de ges chansen. Hur ofta är presentationen, läroboksexemplen och övandet verkligen anlagda på begreppsförståelse?

Det svåraste problemet - det är verkligen är svårt - är gränsvärdesdefinitionen med den logiskt och språkligt knöliga epsilon-delta-formalismen. Vi smickrar oss gärna med att vi lyckas förmedla en ”intuition” istället. Sanningen är dock att de vanliga substituten med ”godtyckligt” och ”tillräckligt” nära inte är ett dugg mer intuitiva och lättfattliga, bara mindre precisa.

Hur ska vi annars förklara att så många studenter, kanske flertalet, räknar ut att

$$\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \to 1 \text{ då } x \to -\infty$$

utan att reagera? Ingen intuition i världen kan säga att en negativ funktion kommer ”godtyckligt nära ett” för tillräckligt stora negativa x.

Vad ska jag föreslå, som föreläst ett otaliga kurser, men aldrig envariabelanalys? Mitt svar, som på de flesta didaktiska frågor, är ”försök något annat”. Eller, åtminstone, ”försök!”, ty väl ofta är det mest det som fattas.

För förståelsen skulle det kanske vara rimligare att öva mer på att bestämma deltan och omegan till givna epsilon än att räkna ut mer eller mindre konstlade gränsvärden av typen 0/0. På rak arm vet jag dock ingen bok som t ex förklarar varför delta ofta väljs i två steg -det första för att begränsa en faktor, nästa för att strypa en annan - trots att idén med ”begränsad gånger nollgående” annars ges en framträdande plats i resonemangen. Här försummas ett tillfälle att dra ihop helheten.

Nyligen gav Studentlitteratur ut en lärobok som påstods täcka all den envariabelanalys och lineära algebra man kunde tänkas behöva ., fast målgruppen aldrig preciserades. På baksidan till detta tidstypiska alster uttrycks författarens ”övertygelse” att matematiska begrepp och fenomen kan göras fullt begripliga utan långa och tekniska bevis.

Jag kan inte låta bli att kasta mig över en sådan bok för att utröna hur många korta och otekniska bevis som offras under den förevändningen, eller var författaren första gången bryter mot Weils bud att aldrig förutsätta mer än nödvändigt.

Typexempel på det första är att de trigonometriska räknelagarna förutsätts utan härledning - *ingen* kan tro att detta utreds tillfredsställande i gymnasiekurserna. Det naturliga i en bok som försöker ”integrera” analys och lineär algebra är att dela upp en enhetsvektor i ortogonala komposanter och vrida båda lika mycket, en påminnelse om det allra mest grundläggande, vad komposanter, sinus och cosinus är.

Linearitet (i detta fall lineariteten av en vridning) borde rimligen betraktas som en sammanhållande princip med icke-triviala konsekvenser - cosinusteoremet och Pythagoras' sats är ett annat exempel (projektionens linearitet).

Det leder naturligtvis till en del besvärande och lärorika stringensfrågor - till sist är det inte så självklart vad en vinkel är för något. Men att inte ens antyda möjligheten av ett åskådligt och naturligt bevis, och därtill hörande problem, finner jag omoraliskt.

Det andra är , som ofta annnars, härledningen av de trigonometriska derivatorna, speciellt då derivatan av sinus i noll,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Det kritiska är olikheten $x < \tan x$ för $0 < x < \pi/2$ som förklaras på de märkligaste sätt i litteraturen. Jag har tidigare (”Tillbaka till sandlådan!”, Utskicket eller min hemsida) anvisat en enkel lösning på det didaktiska problemet - dra tangenten i rätt punkt och jämför brant (tangent)- brantare (båge) - brantast (halv korda).

Här väljer nu författaren att jämföra areor iställetför båglängder. Men cirkelsektorns area är då inte ”bågen gånger radien genom 2”, vilket vore en suggestiv analogi med triangelns area - och möjlig att skärpa, med viss möda.

Den är istället en viss andel av cirkelns area, *som alltså förutsätts.* Om cirkelns area inte är ett specialfall av sektorns area, vad är den då? En integral av ett rotuttryck, föreslog en kollega. Visst, om den nu ginge att räkna ut utan att man förutsätter derivatan av sinus eller dess invers -men hur nära problemet är vi då? Vad belyser beviset?

Tillsist handlar den grundläggande etiska frågan om detta. Att framställa sakens rätta natur, vad som är antagande, påstående, slutsats, vad som är observationer, elementära konsekvenser eller djupgående samband, var teorin tangerar intuitionen och var, helst också varför, den tvingas dra kaniner ur hattar.

Att inte ens försöka något av detta är utslag av den populism som jag - med mycket varierande framgång - ägnat min nu avslutade karriär åt att bekämpa.

Peter Hackman

Peter Hackman, f. 1944 i Stockholm, lektor vid LiTH sedan 1970, går i pension den 1/8 2006.