Lära sig utantill?

Peter Hackman, Matematiska Institutionen

Allt oftare stöter jag bland mina studenter på föreställningen att matematikens grundläggande formler och samband är utantillkunskap, en plåga att lära in och hopplös att komma ihåg. Det är ju rent förskräckligt, ingen vill väl lära sig på det viset? Matematik skulle alltså vara som de uppräkningar av Pauli brev och Jesu lärjungar eller, ve och fasa, psalmverser, som ännu min egen generation plågades med, en bit in på 50-talet.

Och ändå gick det. Vi gjorde rytmiska ramsor av Paulusbreven och psalmverserna bestod av meningar med subjekt och predikat. Dessutom hade de rim.

Men då har matematiken i gengäld desto mer av reson. Det är alltså det som kommit bort, lite grann. Att matematiken är förnuftig och hänger ihop. Att begreppen kommer någonstans ifrån, att de betyder något och att de ofta står för saker som går att se eller tillochmed ta i med händerna. Inte bara reson, utan också intuition.

En av mina käpphästar är de trigonometriska derivatorna,

$$D\sin x = \cos x,\ \ D\cos x = -\sin x$$

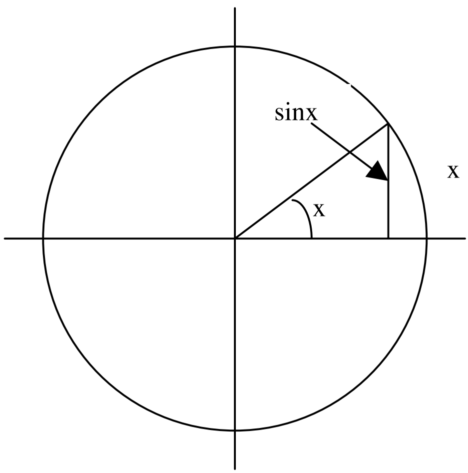
Dessa härleddes omsorgsfullt, och på flera belysande sätt, i t ex den gamla gymnasieboken Gamma. Nu är allt detta borta ur böckerna. De fundamentala gränsvärdena

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = 0$$

(derivatorna i noll) förklaras inte, än mindre härleds de. De ”troliggörs” genom knappning på en räknedosa, som om siffror vore begripligare än figurer. Tänk om programmet använder det som ska visas?

Det är förstås viktigt att vinkeln mäts i radianer, annars blir svaret ``konstigt''. Många lär sig detta utantill. När det sedan ska användas är det glömt och skuggan av en flaggstång en timme före solnedgången växer med en fart som trotsar all mänsklig erfarenhet.

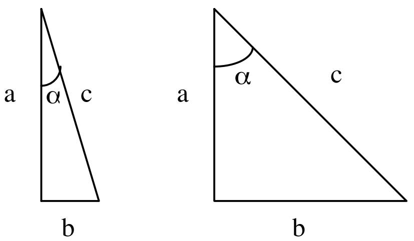
Att vinkeln ska mätas i radianer har givetvis bara en förklaring, den rätta. Radianer är ett bågmått. Trigonometri utspelar sig på enhetscirkeln. $\sin x$ är längden av en sträcka i figuren nedan, en halv korda. x är en båge. Det är bara om vi mäter dem i samma enhet som det är meningsfullt att jämföra dem. Då syns (vi antar hela tiden att $0 < x < \pi/2$) att $\sin x < x$, vilket är en bra början.



Jag tänker inte bevisa detta, eller ens definiera längden av en kurvbåge. Det vore att just nu missa poängen.

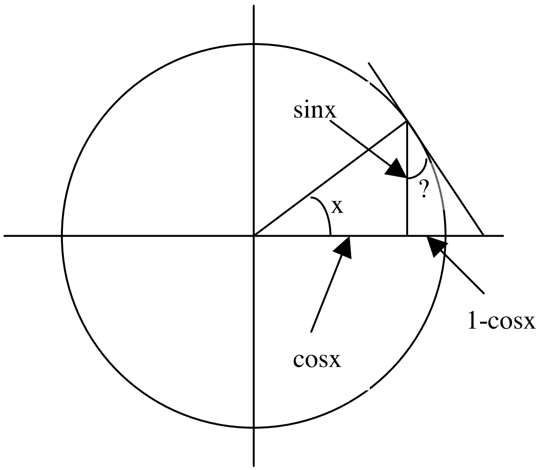
Ty om det överhuvudtaget går att definiera eller bevisa något så ska $\sin x$ bli kortare än x . Matematiker inför inte sina begrepp på härsan och tvärsan för att förbrylla oskyldiga teknologer. Begreppen kommer ur våra intutitiva föreställningar och ur behovet att förklara och sammanfatta exempelvis fysikaliska fenomen. När man definierar kurvlängd så ska rakt bli kortare än krokigt, och brant bli kortare än flackt. Annars kommer begreppen inte att föreställa eller förklara någonting.

Nu var det förhållandet det handlade om. Min fysikkollega Lars Engström säger att "jag byter $\sin x$ mot x så ofta att jag knappt tänker på det." Det gäller små x . Det kan t ex handla om en pendel vid små utslag. En krånglig ekvation blir då så enkel att man kan lösa den elementärt. Om man knappt behöver tänka på saken så måste det givetvis gå att se. Men vi måste börja med något enklare, där allting är rakt, en rätvinklig triangel:



Du går säkert med på att a/c är nära ett, och b/c nära noll i den vänstra figuren, och att inget sådant kan sägas om den högra. Syns detta på något sätt? Ja, det syns i vinkeln α , att den är liten i det första fallet.

Nu går vi till cirkeln igen. Vi kompletterar vår tidigare figur.



Kan vi tala om en vinkel mellan cirkelbågen och kordan? Ja, man kan t ex definiera den som vinkeln mellan kordan och tangenten. Det är inte ens särskilt svårt att visa att denna vinkel är x (likformiga trianglar). Men jag vill att du ska se direkt, att vad än denna vinkel är, hur man än definierar den, så är den liten då x är liten.

Och det är alltså högst upp - om du skjuter kordan åt höger ser du att vinkeln, som nu bildas allt längre ned, blir allt mindre.

På vägen ned mot x -axeln blir bågen med andra ord allt brantare och längst ned stupar den vinkelrätt mot axeln, precis som kordan. Ju mindre x är, desto rakare är bågen och desto mera parallell är den med sträckan $\sin x$

Därför kommer förhållandet dem mellan allt närmre ett då x närmar sig noll (från positiva sidan; vi kan behandla den negativa för sig). Jag hoppas det syns ännu tydligare att förhållandet mellan $1-\cos x$ och x går mot noll eftersom basen $1-\cos x$ står rakt under en vinkel som går mot noll.

Allt detta kan preciseras. Man kan t ex dra tangenten och härleda en olikhet som stänger in vår kvot mellan ytterled med gränsvärdet ett.

Men då har vi lämnat den omedelbara intuitionen och gått över till det formella bevisandet. Det är inte mitt ärende här och det står i alla textböcker. Jag vill förklara. Med Einsteins ord: så enkelt det går, men inte enklare.

Ty det är just den lättköpta enkelheten som förvandlar många elementära fakta till mystifikationer och utantillramsor utan både rim och reson. ”Det här är för svårt för dig, nu bläddrar vi förbi”. Ett fåtal principer blir ett oöverskådligt myller av fragment att banka in. Utantill.

Jag påstår inte att allt du kommer att lära dig är i grunden alldeles enkelt men det finns nästan alltid något under ytan, en naturlig och intuitiv föreställning som kan skymmas av de formella bevisen (men också gör dessa lättare att förstå) och som definitivt försvinner ur sikte genom knapptryckningar och fånigt hopskruvade ``typtal''. Du har rätt att få veta sådant och du hävdar din rätt genom att fråga. Du har lärare till sådant.

Det jag talar om står inte alltid i textböcker. Som mitt lilla exempel antyder, skulle det ibland bli rätt långrandigt. Men den som tränar sig att ställa den kritiska frågan ”vad är detta, hur ser det ut” övar strax också upp sin känsla att se och känna mer direkt, utan omständliga förklaringar. Då blir matematiken efter ett tag lika naturlig, sammanhängande och levande som den väldiga utantillkunskap som ingen ifrågasätter och som aldrig någonsin varit en plåga för dig - ditt eget språk.

Peter Hackman

P Hackman har varit universitetslektor i matematik vid LiTH sedan 1970. Han har vandrat i åtta länder.■