

## INNEHÅLLSFÖRTECKNING

### A. ALLMÄNT OM VEKTORRUM

I.	Inledande övningar till A.II–A.III	7
II.	Vektorrum. Underrum.	10
	1. Definition, vektorrum 10; 2. Exempel till II.1 10; 3. Underrum, inledning 12; 4. Definition, underrum 13; 5. Exempel till II.4 13; 6. Mer om hur man räknar 18	
III.	Lineärkombination. Spänna upp. Hölje.	20
	1. Definition, lineärkombination 20; 2. Definition, spänna upp 20; 3–6. Exempel till III.2 20; 7. Lineärt hölje 24; 8–9. Satsen om löjliga element 25–26; 10. Exempel till satsen 26	
IV.	Lineärt (o)beroende.	30
	1. Definition, lineärt (o)beroende 30; 2–7. Exempel till IV.1 30; 8. Sats: Beroende om och endast om ett element är lineärkombination av resten 32; 9. Exempel till IV.8 33	

### B. BAS OCH DIMENSION

I.	Basbegreppet.	39
	1. Definition, bas 39; 2. Exempel till I.1 40; 3. Sats: Bas ekvivalent med entydig representation av vektorer 41; 4. Definition, koordinater 42; 5. Digitalt filter 42	
II.	Satser om lineärt beroende. Dimension.	44
	1. Hjälpsats: för många element är lineärt beroende 44; 2. Sats: Alla baser har lika många element 45; 3. Definition, dimension 46; 4. Exempel till II.2–II.3 46; 5. Sats: Rätt antal oberoende är en bas 47; 6. Följdsats om rum av lika dimension 48; 7. Exempel till II.5 48; 8–9. Exempel till II.5 (polynomrum, partialbråk) 50	

III.	Banta ned och fylla ut.	53
	1. Sats: banta och fylla 53; 2. Exempel på banta ned för att få en bas 53; 3. Exempel på fylla ut 54; 4. Sats: Underrum har bas 55	
IV.	Determinantkriteriet, igen.	58
V.	Planets ekvation, igen.	60

### C. LINEÄRA AVBILDNINGAR

I.	Definitionen.	65
	1. Definition: additiv, homogen och lineär 65; 2–4. Exempel till I.1 65; 5. Exempel: identiska avbildningen 67; 6. Linearitet i verkligheten 67	
II.	Lineärkombinationer och nollor bevaras.	70
	1. Satsen 70; 2–4. Exempel 70	
III.	Matrisframställning.	73
	1. Sats om matrisframställning 74; 2. Exempel till III.1 75; 3. Exempel: spegling 75; 4. Exempel: projektion 77; 5. Exempel: identiska avbildningen 77;	
IV.	Diverse: mer geometri, vridning, ytskala.	80
	1–2. Exempel, vridning 80; 3. En areaberäkning 82; 4. Ytskala = determinant 85; 5. Ännu en areaberäkning 86;	
V.	Sammansättningar och deras matriser. Ytskala igen.	87
VI.	Plana isometrier.	93
VII.	Linearisering. En plan robot.	96

### D. DIMENSIONSSATSEN. RANG

I.	Nollrum och värderum.	101
	1. Definition, nollrum och värderum 101; 2. Exempel till I.1 101; 3. Sats: nollrum och värderum ÄR rum 103; 4. Exempel på bestämning av nollrum och värderum 104; 5. Fler exempel 105; 6–7. Icketriviala nollrum 108; 8. Exempel (till D.I.6–7) 109	
II.	Dimensionssatsen. Ett bevis.	112
	1. Satsen med bevis 112;	
III.	Robot (fortsättning från C.VII).	114

IV.	Radrum. Kolonnrum. Rang. Ensidiga inverser.	116
-----	---	-----

1. Definition: kolonnrum, radrum, kolonnrang, radrang 116; 2. Sats: radoperationer ändrar inte kolonnrang eller radrang 116; 3. Exempel till IV.2 117

V.	Radrang = kolonnrang (på riktigt).	119
----	------------------------------------	-----

VI.	Ensidiga inverser.	122
-----	--------------------	-----

1. Definition, vänster- och högerinvers 122;

## E. EUKLIDISKA RUM

I.	Introduktion till minsta-kvadratproblem.	127
----	--	-----

II.	Euklidiska rum. Skalärprodukter. Ortogonalitet.	130
-----	---	-----

1. Definition, skalärprodukt, euklidiskt rum 130; 2. Exempel till II.1 130; 3. Definition, norm, avstånd, ortogonalitet 132; 4. Exempel till II.3 132; 5. Definition, ON-mängder och ON-baser 132; 6. Sats: ON-mängder är oberoende, koordinater är skalärprodukter, komponenträkning 133; 7. Exempel, digitalt filter 134

III.	Existens av ON-baser, Gram-Schmidt.	136
------	-------------------------------------	-----

1. Hjälpsats 136; 2. Definition, projektion på enhetsvektor och i hölje 137; 3. Exempel på konstruktion av ON-bas 137; 4. Existenssats för ON-baser 139

IV.	Minsta-kvadratmetoden.	142
-----	------------------------	-----

1. Lemma: Pythagoras' sats; ortogonala komponenter — existens och entydighet; projektion ger kortaste avstånd 142; 2. Projektion i matriser 143; 3. Sats: Minstakvadratlösningen fås ur normalekvationerna 144; 4. Exempel: Lineär regression 145

V.	Cauchy-Schwarz' olikhet.	149
----	--------------------------	-----

1. Bevis för olikheten 149; 2. Exempel i  $\mathbf{R}^n$  och  $C(a,b)$  149

## F. BASBYTE. ORTOGONALA MATRISER ISOMETRISKA AVBILDNINGAR

- I. Från bassamband till koordinatsamband — inledanden exempel. 159
1. Bassamband till koordinatsamband 159; 2. Att transformera en ekvation 160; 3. Omvända samband 160; 4. Sammanfattning 161; 5. Ett geometriskt exempel 161
- II. Lineära avbildningar och basbyte. 165
1. Sats om avbildningsmatris vid basbyte 165; 2. Avbildningsdeterminant beror ej på bas 165; 3. Projektionsexempel 166
- III. ON-baser i euklidiska rum. 168
1. Invers = transponat 168; 2. Exempel 169;
- IV. Isometriska avbildningar. (Kongruensavbildningar.) 171
1. Definition: isometrisk avbildning 171; 2. Sats: Ekvivalens mellan ortogonal matris, isometrisk avbildning, ON-baser bevaras, skalärprodukter bevaras 171; 3. Allmänt om isometrier på **Å.R.** 172; 4. Exempel: En vridspegling 174; 5. Exempel: En vridning 175
- V. Underhållning: allmänna vridningen. 179
1. Dess uttryck 179; 2. Att utläsa vinkel och axel 180; 3. Roterande koordinatsystem 181; 4. Vad den kallas 182

## G. EGENVÄRDEN OCH EGENVEKTORER

- I. Egenvärden och egenvektorer. 187
1. Definitionerna 187; 2. Exempel: projektion, spegling 187; 3. Exempel på avbildningsmatris i bas av egenvektorer 189; 4. Sats: Avbildningsmatris i bas av egenvektorer är diagonal 190; 5. Sats: Egenvektorer till skilda egenvärden är lineärt oberoende 190; 6. Exempel till II.5 191; 7. Sats: sekulärekvationen 193; 8. Exempel till G.II.7 194; 9. Digitalt filter 195; 10. Abstrakta projektioner 196; 11. Fouriermatrisen 197
- II. Symmetriska avbildningar. 201
1. Definitionen 201; 2. Sats:  $F$  symmetrisk om och endast om dess matris i ON-bas är symmetrisk 201; 3. Exempel: Symmetriska avbildningar 202; 4. Spektralsatsen formuleras 203; 5. Lemma: egenvektorer till skilda egenvärden är ortogonala 203; 6. Sekulärekvationens rötter är reella 204; 7. Exempel: En ON-bas till symmetriskt  $F$  204; 8. Tröghetstensorn 205; 9. Spektralsatsen, dim 2 206;
- III. Bevis för spektralsatsen. 210

IV.	Multipliciteter.	212
	1. Sekularekvationen beror ej på bas 212; 2–4. Jämförelse mellan algebraisk och geometrisk multiplicitet 212	
V.	Kvadratiska former.	214
	1. Definitionen 214; 2. Exempel med matrisframställning och skalärprodukt 214; 3. Sats om kvadratiska former och symmetriska avbildningar 215	
VI.	Huvudsatsen för kvadratiska former.	216
	1. Satsen 216; 2. Max och min på enhetsfären 216; 3. Basbytesformel 217; 4. Tröghetsmoment 218	
VII.	Teckenkaraktär.	221
	1. Definition av teckenkaraktärer 221; 2. Exempel, indefinit form 221; 3. Exempel, semidefinit form 223; 4. Sats: teckenkaraktär versus egenvärdernas tecken 224; 5. Extremvärden i flera variabler 224; 6. Kvadratkomplettering = elementära operationer 226; 7. Tröghetsatsen 227	
VIII.	System av differential- och differensekvationer.	230
	1–2. System av differentialekvationer, diagonaliserbara fallet 230; 3. Komplext diagonaliserbara system 233; 4. Ett enkelt filter 235; 5. En differensekvation 237; 6. Ett befolkningsproblem 239; 7. Exponentialserien 241; 8. Icke diagonaliserbara system 245;	
IX.	Svängningsekvationer och samtidig diagonalisering.	248
X.	Mer om $e^{At}$ .	256
XI.	Isometrier i $\mathbf{E}^n$ .	271

## J. APPENDICES

I.	Orientering om affina avbildningar (Kapitel C).	279
	1. Definition: Affin avbildning 289; 2. Centralprojektioner 289	
II.	Avbildningsinvers (Kapitel D).	287
III.	Differentialekvationer (Kapitel D).	289
IV.	Längdskalor. Polärfaktorisering. SVD. (Kapitel G).	294
V.	En tillämpning av polärfaktorisering. Divergens och rotation (Kapitel G).	303

VI. Diskret svängning och temperatur. (Kapitel G).	310
VII. Isometrier och minsta kvadratmetoden.	316
VIII. Cayley-Hamiltons sats.	325
IX. Markov-kedjor.	328