Facit

Detta typsatta facit fullbordar TEXningen av Kossa-boken i Lineär Algebra. Folke och Camilla har återigen gjort det omöjliga. Häftet är delat i en anvisningsdel, "(A)", och en svars- och lösningsdel, "(S), (L)". Anvisningarna kan bestå av hänvisningar till tidigare uppgifter (för att du ska se hur idéerna utvecklas vartefter) eller till bevis av vissa satser (därför att denna anknytning är uppgiftens *poäng*).

Omfattningen och utförligheten av anvisningar och lösningar har begränsats av elementära krav på högskolemässighet. Den idealiska anvisningen vore inte ett "tips" eller första steg, utan en vink om hur en lösning kan arbetas och lekas fram. Den hjälpen tror jag numera bara en lärare kan ge. Här kan det räcka med den allmänna anvisningen att komma på rätt spår i mer teoretiska uppgifter genom att konstruera och studera exempel eller börja med "låga" specialfall.

Jag har försökt undvika "arbetsbeskrivningar" där allt som sedan återstår är att fylla i med egna räkningar.

Räcker inte anvisningen som den är kan det betyda att uppgiften är olämplig! Den kan vara för svår, eller komma för tidigt. Då är den lämpliga strategin att uppsöka enklare uppgifter. De finns nästan alltid. Sannolikt kan också en grundligare genomläsning av texten vara av nöden. Skulle detta facit omintetgöra sådan aktivitet har jag misslyckats.

Jag är tacksam för konkreta påpekanden och rättelser.

p Hackman

(A)

Kapitel A

A.7 a) Lös system som i A.3–5; parameterlösning.

A.16 Lös ekvationen! (inför tre av de obekanta som parametrar)

A.25 a) Använd additionslagarna!

A.31 (Uppgift c) Ett sätt är att härleda ekvationer får de båda mängdernas hölje. Ett annat (gör detta klart för dig!) är att kontrollera att varje element i den ena mängden kan uttryckas i varje element i den andra.

A.39 Sista deluppgiften. Utnyttja att polynomen har olika grad, eller gör omskrivningen $p(x) = p((x - a) + a)$ för godtyckligt element $p \in P_2$.

A.55 c–d) Du kommer långt med att i de system du tidigare ställt upp (med 4 obekanta) stryka godtycklig kolonn och studera det system (med 3 obekanta) du då får kvar.

A.65 T ex, om du ansätter en relation mellan elementen i a), och i den sätter in $x = 1$ har du visat att koefficienten framför 1 är noll. Du kan riskfritt dividera med $x - 1$ och fortsätta (insättning av $x = 1$ kan rättfärdigas som en gränsövergång. Alternativ i just denna uppgift: vad kan sägas när alla polynom har skilda gradtal?

Kapitel B

B.1 Sista delen: det mest rättframma är att ställa upp de vanliga systemen och utnyttja deras speciella form.

B.11 För att visa att de tre polynomen är oberoende: ansätt relation och visa en koefficient $= 0$. Observera att du nu har kvar en kortare relation att arbeta vidare med.

B.18 Anta motsatsen (för att härleda motsägelse). Kombinera satsen om löjliga element med satsen om för få.

B.21 Jfr exemplet omedelbart efter Lemma B.II.1.

B.25 Härled ekvationer för U och V.

B.27 Använd determinantkriteriet på lämpliga ekvationssystem.

B.37 a) Jfr exempel B.III.3.
c) Bestäm en bas för W, p s s som i exempel B.II.7. Minst ett av baselementen kan inte uttryckas som lineärkombination av den givna mängden...
Alternativ: Bestäm ekvationer för höljet av de givna elementen.

B.51 Härled ekvationer för höljena eller bestäm dimensionerna.

Kapitel C

C.10 b) Planets ekvation kan skrivas på två-parameterform, $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Jfr B.V.

C.15 Ur planets ekvation utläses en normalvektor (se Krypa–Gå). Den får ersätta exemplets projektionsriktning.

C.17 Ställ upp förutsättningarna i form av ekvationer ur vilka basbilderna kan lösas.

C.19 Rita bas och basbilder i gemensam figur. Komposantuppdelningar har du övat på i Krypa–Gås första avsnitt.

C.20 Vad som sker med enhetskvadraten: linjärkombinationer bevaras. Vad som sker med kvadraten med sida a: Utnyttja homogeniteten. Vad som sker när den parallellförflyttas: Utnyttja additiviteten.

C.21 Gissa ett resultat (genom att granska F, F^2, F^3) och använd induktion.

C.22 Bestäm F:s verkan på en slugt vald bas för planet.

C.24 t bestäms av att $F(\mathbf{u})$, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ska vara lineärt beroende.

C.27 b) M h a matrisen, eller lineariteten direkt, räknar du ut alla $F(\mathbf{f}_i)$. Obs att dessa bilder sedan ska uttryckas i basen $\underline{\mathbf{f}}$.

C.57 Titta på en egen ON-bas-modell (tre fingrar, t ex!) ur lämpligt perspektiv.

C.59 Lite eftertanke om matrisens betydelse ger att $F(X) = Y$ är ett ekvationssystem.

C.61 Vilka lineärkombinationer av $\mathbf{e}_1$ och $\mathbf{e}_2$ ligger inuti kvadraten? Låt F verka på dessa.

C.62 *Metod I*: Välj ON-bas så att $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2$.
Metod II: Välj $\mathbf{u}$ ortogonal mot först $\mathbf{b}$, sen $\mathbf{c}$.

C.63 $F(\mathbf{e}_1)$ bestäms först av att den är lika lång som $\mathbf{e}_1$. Sen är det lätt att bestämma speglingsplanets normal.

C.69 Efter att ha ställt upp matrisen för $F \pm I$ uttrycker du allt i $v/2$ (vilket är naturligt om du ritat figur).

C.77 b) Multiplicera olikheten med A före kvadratkompletteringen.

C.78 a) Samma lineära avbildning som i exemplet. Bestäm dess verkan på delområdets tre "hörn".
b) Eliminera x_2 ur sambandet mellan x_1, x_2, y_1, y_2. Man ritar enklast en linje (som ej går genom origo) genom att bestämma skärningen med axlarna.

C.82 Det första områdets lodräta begränsningslinjer ska övergå i de andras. Och kurvan $x_1x_2 = 1$ ska övergå i sig själv, dvs. villkoret $y_1y_2 = x_1x_2$ ska gälla.

C.95 Inför beteckningar för $\mathbf{a}$:s belopp och riktningsvinkel. Då är det lätt att ange den önskade vridningens vinkel och därmed dess matris.

Kapitel D

D.1 Näst sista frågan. Det räcker att kontrollera de funna baselementen, för $V(F)$.

D.3 b, d) Ansätt $F = a_0 t^n + \cdots + a_n$; låt F verka. Vilken fason får bilden, var ligger den? När blir den $= \mathbf{0}$?

D.5 c) Kryssprodukten är ortogonal mot faktorerna. Om du använder matris, välj då bas så att matrisen blir extra enkel.

D.7 Ansätt matris med bokstavsbeteckningar. Tänk tillbaka på hur noll- och värderum bestäms ur matrisen och vad detta säger om kolonnernas utseende. Geometriskt alternativ: vad är första bästa exempel på en avbildning med icke-trivialt nollrum? Vad behöver du göra sen för att värderummet ska hamna rätt?

D.9 Till behandlingen av $V(F) \cap N(F)$: geometriskt sett ska du skära en linje med ett plan.

D.13 a) Var ska den första projektionen hamna för att avbildas på nollvektorn i nästa steg? Ta två pappskivor till hjälp.
b) Ansätt $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ och låt F och G verka — titta efter vad som händer.

Kapitel E

E.1 Ortogonalitetsvillkor ger ett ekvationssystem.

E.11 Figuren blir tydligast i en axelparallell rätvinklig låda, med vektorn $\mathbf{u}$ som diagonal. Obs den tidigare kända betydelsen av termerna $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i)\mathbf{e}_i$.

E.19 b) Ta en vektor som inte tillhör W och dela upp i komposanter, en i W, en ortogonal mot W.

E.21 Kolonner = standardbasvektorernas bilder! Projektionen P har du redan övat ($P(\mathbf{u}) = \mathbf{u}_{/\!/}$!)

E.23 Ortogonalitetsvillkoren är ett ekvationssystem.

E.33 Ansätt $\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n$ och teckna ortogonalitetsvillkor.

E.34 a) A:s element på plats (i, j) är $F(\mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_i = F(\mathbf{e}_j)$:s $\mathbf{e}_i$-koordinat.
b) Om $\mathbf{v}$ är ortogonalt mot alla $F(\mathbf{u})$ så är $F^*(\mathbf{v})$ ortogonalt mot *alla* $\mathbf{u}$.

E.35 Visa: $\dim\,(M^\perp)^\perp = \dim M$ och $M \subset (M^\perp)^\perp$.

E.37 Del c). $\det AB = 0$ om $A\ m/n,\ B\ n/m,\ m > n$: Två sätt antyds nedan. Båda bygger på satsen om för många element. Försök igen, innan du läser vidare! *Sätt I*: B:s kolonner beroende ger ett $X \neq 0,\ BX = 0$ (X kolonnmatris). *Sätt II*: AB:s kolonner är lineärkombinationer av A:s. Antal!?

E.43 Behövliga räknelagar för invers, transponat, etc finns i Krypa–Gå B.IV, B.IX. Produkter av typ $A^t B$ tjänar på att uppfattas som en eller flera skalärprodukter (rad gånger kolonn).

E.46 Det förenklar kanske om du först flyttar alla punkterna 3 enheter åt vänster, bestämmer linjen, och sedan flyttar tillbaka.

E.47 Om det gick att hitta ett andragradspolynom genom alla dessa punkter skulle vi kunna lösa ett visst ekvationssystem. Nu ska vi istället lösa motsvarande minsta-kvadratproblem.

E.48 En bit in i räkningarna behöver du inse att $(X - X_0)^t A^t A(X - X_0) \geq 0$. I vanlig ordning är detta uttryck av formen $Y^t Y$, alltså en vektor skalärt sig själv (en kvadratsumma).

E.52 c) Utgå från $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \geq 0$.

E.55 Uttrycket i beloppstecknet är en skalärprodukt.

E.59 Kvadrera och använd Cauchy-Schwarz' olikhet.

E.61 a) Triangelolikheten (E.59a).

Kapitel F

F.9 Inför kantvektorerna som ny bas och uttryck linjens riktningsvektor i denna. Tänk så efter vad som kan sägas om koordinaterna för punkter inom sidoytorna (rita!).

F.10 Inför ortsvektorerna för triangelns hörnpunkter som ny bas. Avgörande är koordinaternas och koordinatsummans tecken. Du *kan* behöva se igenom Avsnitt B.V, om planets ekvation. Eller exempel F.I.4.

F.12 Förutsättningen kan skrivas på formen $\underline{\mathbf{e}}A = \underline{\mathbf{f}}B$. Lös ut $\underline{\mathbf{f}}$ ur detta.

F.13 Att bestämma den nya ekvationen är att sätta in ett koordinatsamband direkt i ekvationen, jfr texten. Att bestämma normalkoordinaterna är att använda det omvända koordinatsambandet.

F.21 Matrisinversionen görs enklast m h a kofaktorer, se Krypa–Gå B.VIII.3. Men man kan göra som vanligt också. Kanske du dividerar med ett uttryck som kan vara $= 0$. Det gör inget förutsatt att du sedan *kontrollerar* resultatet!

F.27 $F(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ kan m h a matrisen skrivas $AX = X$, vilket efter överflyttning är ett homogent ekvationssystem.

F.30 Här är inget bassamband givet så din första uppgift är att utrrycka basen $\underline{\mathbf{f}}$ i basen $\underline{\mathbf{e}}$. Sedan är allting som vanligt.

F.42 Bestäm först en ON-bas där vridningsaxeln ingår, samt vridningens matris i denna bas.

F.51 Byt bas och se bättre! Vilken är den naturliga ON-basen?

F.63 Det räcker att jämföra exempelvis tredje komponenten i $F(\mathbf{e}_1) \times F(\mathbf{e}_2)$ med samma komponent i $F(\mathbf{e}_3)$.

F.67 a)–c) Titta på determinanten.
d) *Alternativ 1*: Produkt av två speglingar, den ena med mycket enkel matris. *Alternativ 2*: Vad är den förändrade matrisens determinant?

F.69 Ledning till sista delen. Utnyttja egenskapen (SB) (Skalärprodukter Bevaras) i F.IV.2.

F.77 c) Enligt b) räcker det att bestämma spåret för avbildningsmatrisen i listigt vald ON-bas.
d) Börja med listigt vald ON-bas. Kontrollera sedan hur allting transformeras under basbytet. Geometrisk lösning: Rita vektorn $F(\mathbf{u}) + F^{-1}(\mathbf{u}) - 2\cos v\ \mathbf{u}$.

F.78 Titta på hur summor och skillnader av basvektorer avbildas, bl a.

F.79 a) Utnyttja att F avbildar en ON-bas på en annan ON-bas. Spegla över den första basvektorn på den första i bildbasen osv. Kontrollera att inte ett steg fördärvar vad det förra steget gjorde: med lite modeller bör det synas vad som händer.
b) Determinanten för en spegling är -1 (Titta på matrisen i enklast möjliga bas).
c) Vilka vektorer fixeras (avbildas på sig själva) i de två stegen?

Kapitel G

G.13 Vad händer när man tar $T\hat{A}T^{-1}$ gånger sig själv upprepade gånger? Vidare behöver du produktformeln för matrisinvers, se Krypa–Gå, B.IX.3.

G.15 Börja med 2/2 och 3/3 så syns mönstret (bl a en del tecken).

G.46 *Inför* (lämplig) bas och se bättre.

G.50 Skriv, t ex $\mathbf{v} = F(\mathbf{v}) + \big(\mathbf{v} - F(\mathbf{v})\big)$ där den första komposanten ligger i underrummet W och den andra är ortogonal mot detta rum.

G.51 a) Alla matrisuttrycken är 1/1-matriser och därför lika med sitt transponat. Utnyttja detta.
b) $(*)$ $F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$ följer av $X^t AX = 0$.
Omvänt: Visa först att $(*)$ medför $F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{u} \cdot F(\mathbf{v})$, genom att byta ut $\mathbf{u}$ mot $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ i $(*)$. Jfr vidare G.II.2.

G.54 b) $\det(A^{-1} - \lambda E) = \det A^{-1} \det(E - \lambda A) =$ osv.

e) Dividera sekularekvationen med λ^2 och inför $t = \lambda \pm \dfrac{1}{\lambda}$.

G.58 *Metod I*: byt bas och se bättre! (Jfr t ex C.51 och C.60, i C.IV) *Metod II* $\big($speciellt i b)$\big)$: Tänk geometriskt: när är $F(\mathbf{u}) /\!/ \mathbf{u}$?

G.60 Tre lösningsförslag:

a) Av G.51 framgår att A:s sekularekvation har tre rent imaginära rötter. Av dessa måste då en vara $= 0$.
b) Ta en egenvektor med egenvärde 0, normera, fyll ut till höger-ON-bas. Om du först gjort ett exempel, t ex det i G.51, ser du nog hur basvektorerna ska väljas allmänt.
c) Kanske enklast, visa: Antisymmetrisk matris i en ON-bas ger antisymmetrisk i alla. (Jfr F.53 om du gjort denna uppgift.)

G.70 Det är väsentligt att alla $\mathbf{v}$ ortogonala mot $\mathbf{u}_0$ betraktas, eller åtminstone $n-1$ oberoende sådana $\mathbf{v}$. Du kan behöva dimensionsresultat ur övning E.29–33 och/eller G.III.2.

G.78 Skalärprodukten av de båda vektorerna är en kvadratisk form i x_i:na och ska alltså minimeras på enhetssfären.

G.79 Byt bas och se bättre. Gå över till en kanonisk bas för den första kvadratiska formen. Vad händer med den andra ekvationen?

G.81 c) Avbilda området på det som begränsas av linjerna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ och en till.

G.83 För minimeringen och maximeringen: använd bevisidén i sats G.VI.2. Skriv om olikheten i beviset som en treledig olikhet med $|\mathbf{u}|^2$ i mitten.

G.85 Med normeringen $A^2 + B^2 = 1$ är avståndet från punkten (t_i, y_i) lika med dess ortsvektors projektion på enhetsnormalen, med koordinater $(A, B)^t$. Använd helst matlab, e.d., för alla beräkningar.

G.101 a) Teckna egenvektordefinitionen och multiplicera till vänster med X^t.

G.125 a) När du kvadrerat den gjorda ansatsen underlättar det avsevärt om du utnyttjar att A^2 kan uttryckas i A och E, enligt Cayley-Hamilton (uppgift 104) eller snabb inspektion. Eftersom den första uppgiften har minst två svar, och de båda sista minst 4, ger jag inget svar. Kontrollkvadrera. Den mellersta matrisens kvadratrötter kommer att bli icke-reella. Vill du jämföra med svaret enligt metoden i b) kan du behöva samband i stil med $(1+\sqrt{3})^2 = 4+2\sqrt{3}$.

I den första deluppgiften kan du pröva en geometrisk tolkning också. Vad uträttar avbildningen? Hur kan den uppdelas i två lika steg?

b) $A = TDT^{-1}$, D diagonal ger att vi kan välja $B = T\Delta T^{-1}$ där $\Delta^2 = D$.

G.126 a) Det kanske överskådligaste förfarandet är:
Ansätt lösningen på formen $X(t) = f_1(t)X_1 + f_2X_2$, X_1, X_2 egenvektorer, skriv om systemet på formen $\dfrac{dX}{dt} = AX + e^t(a_1X_1 + a_2X_2)$, sätt in ansatsen däri och identifiera. Vänta med att sätta in begynnelsevärdena.

Alternativ: $X' = AX + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}$; sätt in $X = TY$, lämpligt T, och gör om till $Y' = DY+$ någonting, där D är en diagonalmatris. Dvs. följ lösningsgången i slutet av G.VIII.2.

Ännu ett alternativ: Bestäm först en partikulärlösning, med en inte alltför långsökt gissning, därpå den allmänna lösningen till det homogena systemet. Gör du på detta sätt bör du inte blanda in begynnelsevärdena förrän du bestämt det allmänna hela lösningsuttrycket.

b) Bestäm komplexa T, D, med $A = TDT^{-1}$, D diagonal.

G.127 Basval enligt ledning. Testa låga potenser, gissa, gör induktion.

G.128 Ansatsen är $X = e^tY_1 + te^tY_2$.

G.130 Om lågpassfiltrets ekvation är $X' = AX + Bu$ så är ekvationen för detta exempel $X' = A^{-1}X - Bu'$ med $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

G.132 Matrisen är inte diagonaliserbar. Följ metoden i G.VIII.5 så nära det går genom att införa en bas där *en* egenvektor ingår. Om du löst uppgift F.27 har du redan bestämt denna bas.

G.134 Systemmatrisen är komplext diagonaliserbar. Samma sorts räkningar som i det reella fallet.

(S) (L)

Kapitel A

A.3 Kalla elementen i M för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$;

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3$.

b) Lös systemet $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right)$.

c) Ja.

d) Ja.

A.5 a) Kalla elementen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$; $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2$; $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ går ej.

b) $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$

c) Nej.

A.7 Kalla elementen i M för $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

b) $\mathbf{v}_3 = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.

c) $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = (\lambda_1 + 2\lambda_3)\mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_3)\mathbf{v}_2$.

A.13 a) Varken (S) eller (P).

b) Både (S) och (P).

c) (S) men inte (P).

d) (S) och (P), ett plan genom origo.

e) Varken (S) eller (P), linje, ej genom origo.

A.14 a) Spänner upp.

b) Spänner inte upp, godtycklig vektor med $x_1 - x_3 \neq 0$.

c) Samma svar som b).

A.15 Det finns minst fyra naturliga svar, beroende på valet av parametrar. Samtliga kan prövas genom insättning i ekvationen, Ett av svaren är

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

A.16 Ja. Villkoret stämmer med den givna ekvationen, så varje element i W är linjärkombination av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

A.17 Nej. Du får skarpare villkor (två stycken). Till exempel: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0; 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0$ (om du fått andra villkor kan du kontrollera dem genom att sätta in de båda elementen i dem).

Till exempel $\mathbf{v}_3$ är inte lineärkombination av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$.

A.25 a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$.

b) $x^2 = \dfrac{1}{3}(1 + 2x + 3x^2) - \dfrac{2}{9}(1 + 3x) - \dfrac{1}{9} \cdot 1$.

A.31 a) Nej.

b) Ja.

c) Ja. Ekvationen för bådas hölje är $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

A.39 a) Ja.

b) Nej.

c) Ja.

d) Nej.

e) Ja.

f) Ja.

A.51 a) Kalla elementen $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4$. Allmän relation: $2t\mathbf{v}_1 - t\mathbf{v}_2 - t\mathbf{v}_3 + 0\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$; icke-trivial: ta $t \neq 0$; t ex $t = 1$.
b) Nej, underbestämt homogent system. c) Alla utom $\mathbf{v}_4$.

A.55 b) Nej. Och så är det alltid för beroende mängder.
c) Alla som innehåller $\mathbf{v}_4$. d) Alla som innehåller $\mathbf{v}_4$.

A.57 a) Oberoende. b) Oberoende.
c) Beroende; en icke-trivial relation har koefficienterna 2, -1, -1.
d) Beroende; en icke-trivial relation har koefficienterna $-1/\sqrt{2}$, $-1/\sqrt{2}$, 1.
e) Beroende; en icke-trivial relation har koefficienterna $\sqrt{2}$, $-(\sqrt{3}+1)$, $\sqrt{2}$.
f) Beroende; en icke-trivial relation har koefficienterna 1, -2, 1.

A.63 a) Beroende: $(\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3) + (\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3) - 2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$.
b) Oberoende.

Kapitel B

B.1 a) $-1, 0, 2$. b) $0, -1, 1$.
c) Nej, mängden är varken oberoende eller uppspännande.
d) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

B.2 Anvisning för kontroll: Svaren ska i båda uppgifterna bestå av två lineärt oberoende (icke-proportionella) vektorer som satisiferar systemet. De båda lösningsrummen är lika.

B.4 $\dim W = 3$. Uppgift A.17: för få element, spänner inte upp. Uppgift A.15: rätt antal, oberoende, bas.

B.5 a) Ja. Lineärt oberoende, rätt antal, således bas.
b) Nej. c) Ja, men ingen bas.
d) Nej.

B.7 a) $\dim U = 3$ (Jfr exempel B.II.7). b) $\dim V = 2$; (Använd A.III.9).
c) Ja, elementen, och därmed varje lineärkombination av dem, satisfierar U:s ekvation.
d) Nej, olika dimension.

B.9 b) $\dim V = 3$. c) Ja.
d) Ja, B.II.6.

B.25 a) En bas $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Dimension $= 1$. b) $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Dimension $= 1$.

B.31 a) Till exempel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. b) Till exempel $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
c) Till exempel $\{t^2,\ t^3,\ t^2 + t^4\}$.

B.33 För $a = 1$ är höljet ej lika med P_3. Vi får en bas för höljet t ex genom att stryka det andra och det sista elementet. För övriga a får vi en bas genom att stryka endast det andra elementet (t ex).

B.37 a) Fyll ut med något $\mathbf{x}$ sådant att $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \neq 0$. Ty exakt dessa $\mathbf{x}$ är inte lineärkombination av den givna mängden.
b) Till exempel $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Den sannolikt bekvämaste lösningen är att lägga till de fyra standardbaslementen, göra trappa och därpå stryka löjliga element från höger.
c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (t ex).

B.41 Nej. Du kan lätt hitta exempel med två vektorer som spänner upp ett plan i **Å.R.**, och två vektorer utanför detta.

B.45 A spänner upp, B gör det inte. Båda är beroende. A innehåller tre oberoende element, A endast två.

B.51 $[M_2] \subset [M_1]$, *strikt inklusion.*

B.53 a) Falskt. b) Falskt.
c) Sant endast om $a = 0$. d) Sant om och endast om $b \neq 2a$.
e) Sant. f) Sant.

B.55 Ta t ex de 2 första standardbasvektorerna.

Kapitel C

C.5 $F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

C.6 Alla utom b) (homogen, men fel grad!).

C.7 $\begin{pmatrix} 17 \\ 34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 32 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

C.10 a) $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ ger $F(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}_0) + tF(\mathbf{v})$; Linje med riktning $F(\mathbf{v})$ om denna vektor $\neq \mathbf{0}$; en enda punkt eljes (Det senare kan t ex inträffa om F är en projektion utmed riktningen $\mathbf{v}$, t ex ortogonal projektion i $\mathbf{v}$:s normalplan).

b) Bildmängden är en *punkt* om $F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ (vilket kan inträffa om F är projektion på normallinjen till $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$) en *linje* om $F(\mathbf{u}) \parallel F(\mathbf{v})$ (t ex om F är en projektion utmed riktningen $\mathbf{u}-\mathbf{v}$, så att $F(\mathbf{u}-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$) och ett *plan* om $F(\mathbf{u})$ och $F(\mathbf{v})$ är icke-parallella.

c) På parallella linjer eller samma linje; en eller två punkter.

d) $\mathbf{r} = \dfrac{1}{\lambda+\mu}(\lambda\mathbf{r}_0 + \mu\mathbf{r}_1)$ ger $F(\mathbf{r}) = \dfrac{1}{\lambda+\mu}\big(\lambda F(\mathbf{r}_0) + \mu F(\mathbf{r}_1)\big)$ dvs motsvarande delningspunkt (samma delningsförhållande) på sträckan mellan $F(\mathbf{r}_0)$ och $F(\mathbf{r}_1)$.

C.11 Sträckning (skalning, töjning) faktorn $1.3 = 1.15 + 0.15$ utmed $\mathbf{f}_1$:s riktning. T ex enhetscirkeln avbildas på en ellips, som är aningen utdragen i denna riktning. Matrisen är $\begin{pmatrix} 1.15 & 0.15 \\ 0.15 & 1.15 \end{pmatrix}$.

C.13 $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$.

C.14 Med $a = \cos v$, $b = \sin v$, är matrisen $\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$.

C.15

Projektion:
$$F(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$
$$F(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{3}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$
$$F(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$

Spegling:
$$F(\mathbf{e}_1) = \frac{1}{3}(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$
$$F(\mathbf{e}_2) = \frac{1}{3}(-2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$$
$$F(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Du kan vilja jämföra din lösning med den i Krypa–Gå, Exempel B.V.11.

C.16 Avbildningen är en *skjuvning*: Spetesen av vektorn $\mathbf{u}$ förskjutes parallellt med vektorn $\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2$. Den kvadrat som spänns upp av vektorerna $\mathbf{e}_1 \pm \mathbf{e}_2$ avbildas på en parallellogram med samma bas och höjd.

C.17 a) $\dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $\dfrac{1}{b}\begin{pmatrix} b & c-a \\ 0 & s \end{pmatrix}$ där $s = \sqrt{3}/2, c = 1/2$.

C.19 $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

C.20 Bilden av enhetskvadraten är en parallellogram uppspänd av basbilderna, utom i det näst sista exemplet, där basbilderna är parallella (bilden är då en sträcka). Om urbilden töjs i skalan a, töjs bilden i samma skala. Parallellförflyttning av urbilden medför parallellförflyttning av bilden.

C.22 Avbildningen är projektion utmed $\mathbf{a}$:s normalvektor, på linjen genom $\mathbf{b}$ (ty den första avbildas på nollvektorn och den andra på sig själv).

C.49 Vridningsvinkel v. $a = -\tan v/2$, $b = \sin v$.

Du har sannolikt inte använt alla matriselement för att bestämma a och b. Du måste isåfall pröva resultatet.

Uppgiften är olösbar om v är en udda multipel av π.

C.51 Med $c = \cos 15^\circ$, $s = \sin 15^\circ$ fås att S och R ges av $\begin{pmatrix} c & s \\ s & c \end{pmatrix}$ respektive $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$.

C.57 $F : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G : \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $F \circ G : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $G \circ F : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$F \circ G$ och $G \circ F$ är vridningar 180° kring $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3$ respektive $\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.

C.59 a) Olösbar. b) $\mathbf{u} = (3 \quad 2 \quad 0)^t + t(-2 \quad -1 \quad 1)^t$.

C.61 En lineärkombination av $\mathbf{e}$:na ligger inuti kvadraten omm koordinaterna är ≥ 0 och ≤ 1. Bildmängden blir den romb som bestäms av basvektorernas bilder, d v s av $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$ och $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. Arean är 3 a.e.

C.63 Med $a = 1/\sqrt{2}$ och $b = 1/2$ är matrisen $\begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & b & -b \\ a & -b & b \end{pmatrix}$.

C.69 $\begin{pmatrix} \cos v \pm 1 & -\sin v \\ \sin v & \cos v \pm 1 \end{pmatrix}$. Formlerna för halva vinkeln ger nu de resultat du också kan rita. Vridningsvinklarna blir $\frac{v}{2}$, $\frac{v}{2} + 90^\circ$. Den efterfrågade talfaktorn är $2\cos\frac{v}{2}$ respektive $2\sin\frac{v}{2}$. För de kvaderade avbildningarna erhålles dubbla vridningsvinkeln, och talfaktorn kvadrerad. Obs att $(F+I)^2$ blir en konstant gånger F.

C.71 $\begin{pmatrix} \cos w & -\sin w \\ \sin w & \cos w \end{pmatrix}$ där $w = 2(v_2 - v_1)$; en vridning.

C.73 Ytskalan $= 1$.

C.75
a) Sträckning likformigt i alla riktningar. Klot kring origo avbildas på större klot.
b) Sträckning (skalförändring i $\mathbf{e}_1$-led): klot $\to$ cigarr.
c) Spegling i det plan som spänns upp av $\mathbf{e}_2$ och $\mathbf{e}_3$.
d) Speglingen i c) följd av en vridning.
e) Spegling i *linjen* $\mathbf{u} = t\left(\cos\frac{v}{2}\mathbf{e}_1 + \sin\frac{v}{2}\mathbf{e}_2\right)$.
f) Vridning 180° kring linjen $\mathbf{u} = t\left(\cos\frac{v}{2}\mathbf{e}_2 + \sin\frac{v}{2}\mathbf{e}_3\right)$.
g) $F(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{u}$

C.77

b) $\pi\sqrt{AC - B^2}$.

C.78 a) En sjättedel. Hörnen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, med koordinater $(x_1, x_2) = (1,0), (0,1)$ avbildas på $(y_1, y_2) = (1,0), (\cos\pi/3, \sin\pi/3)$.
b) Den del av enhetscirkeln som ligger nedanför linjen $\sqrt{3}y_1 - y_2 \geq \sqrt{3}/2$.

c) Den högra faktorn är en *skjuvning* som stukar ellipsen "framåt" (i $\mathbf{e}_1$:s riktning) så att t ex dess högsta och lägsta punkter $(x_1, x_2) = (\mp 1/\sqrt{3}, \pm 2/\sqrt{3})$ avbildas till punkterna $(0, \pm 2/\sqrt{3})$ på en koordinataxel.
Bildellipsen blir symmetrisk kring koordinataxlarna, och arean ändras ej. Den andra faktorn trycker ihop ellipsen i $\mathbf{e}_2$:s riktning så att den förvandlas till en cirkel.
d) Matrisen är BA där $B = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$; $\quad A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

C.81 a) 2 resp $2a^2$. b) $18/11$.
c) Med $y_1 = 2x_1 + x_2$; $y_2 = x_1 - 2x_2 = 0$; avbildas den tredje linjen på $y_1 + y_2 = 10$. Arean av bildområdet är 5. Determinanten är 5. Ursprungsarean är alltså $= 1$.

C.82

$$F(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

C.91 Om vridningsvinkeln är v så är F^{-1} en vridning med vinkeln $-v$. $F - F^{-1}$ är $2 \sin v$ gånger en 90-gradersvridning.

C.93 Antingen vridning $\arccos 4/5$ med matris $\begin{pmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ eller spegling i linjen med riktningsvektor $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$, matris: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

C.95 Med $|a| = r$ kan den önskade vridningens matris skrivas

$$A = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Bilden av $\mathbf{a}$ blir $r\mathbf{e}_1$. Bilden av $\mathbf{c}$ blir $\frac{1}{r}[(a_1c_1 + a_2c_2)\mathbf{e}_1 + (-a_2c_1 + a_1c_2))\mathbf{e}_2]$ varur arean (igen) $=$

$$|a_1c_2 - a_2c_1|.$$

Kapitel D

D.1 $\underline{\mathbf{e}}(-1 \quad 2 \quad 1)^t$ respektive t ex $\{F(\mathbf{e}_1),\ F(\mathbf{e}_2)\}$ (kolonn 1 och 2).

D.2 $\begin{pmatrix} t & -t \\ t & -t \end{pmatrix}$ där $t \neq 0$. Geometriskt alternativ: projektion följd av vridning, $90°$.

D.3 a) $V(F) =$ linjen ; $N(F) =$ dess normalplan.
b) $N(F) = P_1,\ V(F) = P_{n-2}$.
c) $N(F)$ trivialt (endast nollvektorn) ; $V(F) = [t, t^2, \ldots, t^{n+1}]$.
d) $N(F) = [t^2] \quad V(F) = [1, t, t^3, \ldots, t^n]$ (polynom som saknar t^2-term).

D.4 $F + I$: Värderum: speglingsplanet, nollrum: dess normal. $F - I$: Tvärtom.

D.5 a) $N(F) = \{t\mathbf{a}\}$. b) $\dim V(F) = 2$.
c) $V(F) = \mathbf{a}$:s normalplan.

D.6

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Värerummet är P_2, nollrummet är P_0 (konstanter). Du kan vilja generalisera.

D.9 (Delar av svaret): Man bör notera att det alltid är sant att $N(F) \subset N(F^2)$ och $V(F^2) \subset V(F)$ för att förstå poängerna. Ty $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow F^2(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, d v s $\mathbf{u} \in N(F) \Rightarrow \mathbf{u} \in N(F^2)$. Och $F^2(\mathbf{u}) = F(F(\mathbf{u})) = F(\mathbf{v})$ visar att varje element i $V(F^2)$ tillhör $V(F)$ (det som uppnås i två steg uppnås speciellt i det andra steget).

a) F och F^2 har samma noll- och värderum. Nollrummet spänns upp av $(1 \quad 1 \quad 1)^t$. Värderummet är "planet" $x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$. Bas, t ex, de två första kolonnerna. Vi kan bilda en bas av efterfrågad typ.
Det avgörande i denna uppgift är att nollrum och värderum endast har nollvektorn gemensam. När F verkar en gång till (från sitt värderum) kan ingen ytterligare dimensionsförlust ske.
b) Nollrummet till F spänns upp av $(1 \quad 1 \quad 1)^t$ som ligger i $V(F) : -5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$, (ett plan) uppspänt återigen av de två första kolonnerna. F^2 får större nollrum och mindre värderum (ty $N(F) \subset V(F)$ medför ytterligare dimensionsförlust när F verkar en gång till). $V(F^2)$ spänns upp av $(6 \quad 11 \quad -14)^t$. Nollrummet har t ex basen $(1 \quad 0 \quad 0)^t$, $(0 \quad 1 \quad 1)^t$. Vi kan inte bilda den efterfrågade basen.

D.12 De kolonner under strecket, som står rakt under noll-kolonner, är koordinater för en bas för nollrummet. Nollskilda kolonner ovanför strecket är koordinater för en bas för värderummet. Speciellt har du konstruerat en bas för definitionsrummet, där vissa element är en bas för nollrummet, och de övrigas bilder är en bas för värderummet. Det är exakt vad som visas i D.II.1.

D.13 a) Om P_1 och P_2 skär varandra under rät vinkel så är nollrummet det plan som spänns upp av de båda planens normaler, och värderummet = skärningslinjen. Eljes är nollrummet detsamma som för G, d v s G:s normallinje och värderummet detsamma som för F, d v s planet P_2.
b) Nollrummet består av alla konstanter och värderummet är P_{n-1}.

c) Samma svar som i b).

d) Om $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ inte är inbördes ortogonala är nollrummet detsamma som för G, d v s linjen $[\mathbf{a}]$, och värderummet detsamma som för F, d v s $\mathbf{b}$:s normalplan. Annars är nollrummet $=$ $\mathbf{b}$:s normalplan och värderummet $=$ linjen $\mathbf{a}$.

D.17 a) Antalet är $\geq n - m$.

b) Lösbarhet för alla $B \Leftrightarrow V(F) =$ hela $\mathbf{R}^m \Leftrightarrow \dim N(F) = n - m \Leftrightarrow$ antalet parametrar $= n - m$.

D.21 För $k \neq 2$ finns lösning $e^t q(t)$ där q har samma grad som p. För $k = 2$ finns lösning $e^t q(t)$ där q:s grad är 2 enheter högre än p:s grad. Här kan konstanten och förstagradstermen utelämnas, eftersom de tillhör nollrummet (dvs uppfyller den homogena ekvationen $y'' - 2y' + y = 0$).

Dvs vi kan ta $t^2 e^t r(t)$ med r av samma grad som p.

D.29 a) Om $\mathbf{y}$ ligger i både $V(F)$ och $N(F)$ så kan vi dels skriva $\mathbf{y} = F(\mathbf{x})$; dels är också $F(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$; detta ger $F^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$; enligt förutsättningen på F innebär det att $F(\mathbf{x}) = F^2(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, d v s $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, VSV.

b) $V(F)$ är ett plan och $N(F)$ dess normallinje eller tvärtom.

Sista frågan: elementen i $V(F)$ avbildas på sig själva. Det kan i det nyss beskrivna fallet tolkas som projektion (och kallas i abstraktare situationer också för projektion).

D.33 a) $a_1 + a_2 t + \cdots + a_n t^{n-1}$. b) Nej, respektive ja.

c) Till exempel $G\big(p(t)\big) = t \cdot p(t)$, men det finns fler.

d) Nej. Obs att $F(1) = 0$, vilket skulle ge $G\big(F(1)\big) = G(0) = 0 \neq 1$.

D.36 $N(F)$ består av alla $(\mathbf{u}, -\mathbf{u})$ där $\mathbf{u} \in U \cap V$. $V(F) = U + V$.

D.51 Vänsterinvers saknas, $\operatorname{rg} A = 2 < 4$.

D.55 $(A^t A)^{-1} A^t$.

Kapitel E

E.1 Fyll ut med + eller $-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (höljets ekvation: $x_1+x_2+x_3+x_4=0$. Tolkning: jfr planets ekvation, Krypa–Gå, B.V). Koordinaterna för $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}$ blir $3/2$, $-1/2$, $-1/2$, $3/2$ (om vi valt + ovan). (Du använde väl E.II.6, i stället för att lösa ekvationssystem?)

E.7 a) Ja.

b) Nej. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=(x_1+x_2)^2=0$ då $x_1=-x_2$; kan alltså bli 0 utan att $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.

c) Nej! $\mathbf{u}*\mathbf{v}\neq\mathbf{v}*\mathbf{u}$ i allmänhet. d) Ja.

e) Nej. $f(t)=t(t-1)(t-2)$ ger $f*f=0$; men $f\neq 0$.

f) Ja. Villkor iv): $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=(x_1+\frac{1}{2}x_2)^2+\frac{3}{4}x_2^2\geq 0$; likhet endast då båda parenteserna $=0$; dvs endast då $x_1=x_2=0$

E.13 a) Till exempel $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

b) $\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2100}}\begin{pmatrix}37\\1\\-17\\-21\end{pmatrix}\right\}$.

E.14 $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}}(3x^2-1)$.

E.15 a) T ex $\left\{\frac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}4\\-3\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$. b) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\-4\\3\\-4\end{pmatrix}+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

E.19 b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{12}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\3\end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Jämför nu den sista vektorn med rummets ekvation och med kommentaren i uppgift E.1 ovan.

E.21 $P: A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1&1&-2\\1&2&2&1\\1&2&2&1\\-2&1&1&3\end{pmatrix}$

$Q: E-A$

Anm: Om du arbetar med en godtycklig vektor i stället för basvektorerna får du direkt fram en matrisprodukt som beskriver avbildningen och avslöjar dess linearitet.

E.23 b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$

E.25 Till exempel $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{38}} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{95}} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$

E.29 a) Normallinjen.

b) Lösningsmängden till systemet $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}.$

E.31 $N(P) = M^\perp$, $V(P) = M$. Slutsats: av dimensionssatsen följer $\dim M + \dim M^\perp = \dim V$.

E.33 Skalärmultiplikation av ansatsen med $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ ger i tur och ordning att $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p = 0$.

E.41 a) $X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

E.42 a) $X = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $AX = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ Obs. att projektionen AX är entydigt bestämd. Taltrippeln X är koefficienterna för projektionen som lineärkombination av A:s kolonner. Eftersom dessa är lineärt beroende är matrisen X icke entydigt bestämd.

b) $\begin{pmatrix} 12/7 \\ 20/7 \end{pmatrix}$

E.45 $\frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t \right).$

E.46 $y = 3t + 1$.

E.47 $p(x) = 0.3036x^2 + 1.0171x + 1.0178$ (meningen i denna noggrannhet kan diskuteras. Gör det!)

E.52 a) $|\mathbf{u}|^2 \le (\mathbf{u} \mid \mathbf{v})$; $|\mathbf{u}|^2 \le |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$ enligt Cauchy-Schwarz alltså $|\mathbf{u}| \le |\mathbf{v}|$; $(\mathbf{u} \mid \mathbf{u}) \le (\mathbf{v} \mid \mathbf{v})$.

E.53 $(f \mid f) = (g \mid g) = 1 \Rightarrow (f+g \mid f+g) = (f \mid f) + (g \mid g) + 2(f \mid g) = 2 + 2(f \mid g) \le 2 + 2|f||g| = 4$.

E.55 $|x_1 + 2x_2 + 3x_3| = \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| \le \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right| \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot \sqrt{14}$. Likhet då faktorerna är parallella, vilket ger $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

E.59 b)
$$\begin{aligned} |\mathbf{u}+\mathbf{v}|^2|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^2 &= (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})(|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})) \\ &= (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2)^2 - 4(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})^2 \\ &\le (|\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2)^2 \end{aligned}$$

E.63 Trigonometriska ettan! (Högerledet är beloppet av en kryssprodukt i kvadrat).

Kapitel F

F.1 $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{3}(2\mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2), \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{3}(\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2).$

$y_1 = \frac{1}{3}(2x_1 + x_2), \qquad y_2 = \frac{1}{3}(-x_1 + x_2).$

$x_1 + 2x_2 = 3.$

F.2 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1}$: pröva!

F.3 $y_1 + y_2 = 1$. Normalvektorn är $\underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{f}}\,\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 9 \\ 17 \end{pmatrix}$ varvid sambandet $Y = T^{-1}X$ kommit till användning. Observera att normalvektorns nya koordinater *inte* kan utläsas ur ekvationen eftersom nya basen *inte* är ON.

F.5 $\underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 6 \\ 3 & -3 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

F.9 a) $t = 6/5$ (det t för vilket den största koordinaten är $= 1$ samtidigt som alla är ≥ 0.) Punkten är $(6/5 \quad 6/5 \quad 12/5)$.

b) Tre stycken. (Avgörande är hur många koordinater som är större än 1 eller mindre än 0.)

F.10 Ja. Alla nya koordinater är > 0 och deras summa är > 1.

F.11 $X = TY; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; Y = T^tX$; ($T^{-1}$ är i detta fall T^t, vilket förklaras i senare teori) $\frac{3}{2}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 \leq 1; \quad 2\pi/\sqrt{3}.$

d) $y_1y_2 = -1/2.$

F.12 a) $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

b) Går ej. De $\mathbf{f}$ du kanske fick fram är lineärt beroende. Förutsättningarna är orimliga. Enligt den första koordinatuppsättningen är $\mathbf{g}$:na beroende, enligt den andra är de det inte.

F.21 $A_e = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} b_1b_2 - a_1a_2 & a_1^2 - b_1^2 \\ b_2^2 - a_2^2 & a_1a_2 - b_1b_2 \end{pmatrix}$ där $D = a_1b_2 - a_2b_1$.

F.24 Med $c = \cos v,\ s = \sin v$ blir matrisen

$$\begin{pmatrix} c^2 & cs \\ cs & s^2 \end{pmatrix}.$$

F.27 I basen $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ fås matrisen $A_f = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Om du fått -4 i stället för 4 så har du vänt den ena basvektorn fel.

Tolkningen är en *skjuvning*. Avbildningen förskjuter spetsen av en vektor parallellt med linjen $x_1 + x_2 = 0$ 4 gånger avståndet till denna linje. Om du ritar $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, F(\mathbf{e}_1), F(\mathbf{e}_2)$ i en och samma figur, med samtligas spetsar på linjen $x_1 + x_2 = 1$ bör du se (och förstå) detta.

F.28 $U^{-1}AT$, d v s $F(\underline{\mathbf{f}}Y) = \underline{\mathbf{h}}U^{-1}ATY$.

F.30 $A_f = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

F.41 $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}\begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{e}}T$; $X = TY$; $Y = T^{-1}X = T^tX = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ -\sin v & \cos v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $\mathbf{u} = \cos w\mathbf{e}_1 + \sin w\mathbf{e}_2 = \cos w\mathbf{f}_1 - \sin w\mathbf{f}_2$ där $w = v/2$.

F.43 $\mathbf{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2)$; $\quad T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} \\ -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

F.44 $c = \cos v$, $s = \sin v$, $\begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ q & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix} = \ldots$ Plats (1,2), (2,1): $(c^2 - s^2)q + cs(r-p) = 0$ om $\tan 2v = 2q/(p-r)$. $p = r$: ta $v = \pi/4$.

F.45 $A_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\quad A_e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (för tredje gången!)

F.47 a) $A_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. b) $A_e = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

F.48

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Basbilderna kan faktiskt också utläsas ur en slugt ritad figur.

F.50 a) $\begin{pmatrix} \cos^2 v & \sin v\cos v \\ \sin v\cos v & \sin^2 v \end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} \cos(2v+u) & \sin(2v+u) \\ \sin(2v+u) & -\cos(2v+u) \end{pmatrix}$.

F.51 Punktens nya koordinater: $3(1.1,\ 0.8,\ 0.5)$. Närmsta kant: $3\sqrt{0.05}$. Närmsta hörn: $3\sqrt{0.30}$. Närmsta sida: $3 \cdot 0.1 = 0.3$.

F.52 $P^tP = E$, $\quad Q^tQ = E \;\Rightarrow\; (PQ)^tPQ = Q^tP^tPQ = E$. $\quad P^tP = E \;\Rightarrow\; PP^t = E \;\Rightarrow\; ((P^t)^tP = E$.

F.60 Sammansättning och invers är isometrier. Den senare finns eftersom determinanten är $\pm 1 \neq 0$ (eller därför att nollrummet uppenbarligen är trivialt, värderummet fullt, och således existerar invers; se t ex Appendix J.II, eller D.I.6 med följande Anm).

F.61 Vridning 90° kring $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.

F.62 Vridningar bevarar vektorprodukter i meningen $F(\mathbf{u}) \times F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (längder, vinklar och orientering bevaras). För vridspegling, byt tecken på högerledet.

F.64 $F(\mathbf{e}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3)$.

F.65 Matrisen är

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

.

F.66 *Isometrisk*: Teckna $F(\mathbf{u}) \cdot F(\mathbf{u})$ och utveckla. Obs att $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1$.
Symmetriskt: Båda skalärprodukterna blir $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} - 2(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ $F^2 = I$: Teckna $F(\mathbf{w})$ och sätt in utrycket för $\mathbf{w} = F(\mathbf{u})$. I **Å.R.** är F spegling i ett plan med normal $\mathbf{v}$. Att $F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot F(\mathbf{w})$ inser man då enkelt genom att jämföra längder och vinklar i båda leden. F:s matris i den fiffiga basen har -1 på plats $(1,1)$, 1:or för övrigt i huvuddiagonalen; nollor eljes. Symmetrisk matris i *denna* ON-bas ger symmetrisk i alla, enligt övning F.54.

F.67 a) Vridning. b) Vridning.
c) Vridspegling.
d) En vridning (ty isometri med determinant $+1$).

F.77 a) $\operatorname{Sp} AB = \operatorname{Sp} BA = \sum\sum a_{ij}b_{ji}$. b) $\operatorname{Sp} A_f = \operatorname{Sp} TA_eT^{-1}$; utnyttja a)
Att fråga efter vridningsvinkelns sinus är meningslöst. Sinus har ett tecken som beror på vilket håll (vilken sida av vridningsplanet) vridningen betraktas från.

F.79 c) Vridningsaxeln är speglingsplanens skärningslinje, vinkeln är dubbla vinkeln mellan planen. Jfr övning C.71. Du behöver bara titta på vad som händer med två listigt valda vektorer, vinkelräta mot skärningslinjen.

d) $$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{pmatrix}.$$

Kapitel G

G.1 a) $\lambda = n$; b) $\lambda = n$;
c) $\lambda = -n^2$; d) $\lambda = 0$;

G.2 4,4, ej egenvektor, 1, ej.

G.3 a) En bas av egenvektorer är $\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2$, egenvärde 8, $3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2$, egenvärde 0. Avbildningen är en projektion följd, (eller föregången av), en sträckning (skalning) med faktorn 8.

b) Egenvärdena är 0 och 1. Egenvektorer till 0 är alla nollskilda vektorer i nollrummet, dvs. alla $t(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$, $t \neq 0$. Egenvektorerna till 1 är alla nollskilda vektorer i planet $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$, vilekt i detta fall sammanfaller med värderummet. Det senare klargör att den givna avbildningen är en (sned) projektion.

G.4 a) Samma egenvärde. b) Egenvärdet kvadreras.

G.5 Egenvärde 2. Egenvektorer $t\underline{\mathbf{e}}(3 \quad 2 \quad 1)^t$; $t \neq 0$.

G.6 Nej.

G.7 Spegling: egenvektorer alla nollskilda vektorer parallella med, eller ortogonala mot speglingslinjen. Egenvärden $+1$ respektive -1. Vridning $\neq$ 0, 180°: inga egenvektorer. Vridning = 0, 180°: alla nollskilda vektorer; egenvärde $+1$ i det första fallet, -1 i det andra.

G.8 Larviga exempel: vridning 90° eller spegling. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ med egenvärden λ och $-\lambda$ ger $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ egenvektor till F^2 men ej till F.

G.13 b) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ svarande mot egenvärdena 3, 1.

c) $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (man behöver *inte* formeln $\hat{A} = T^{-1}AT$).

e) $T^{-1}AT = \hat{A}$; $A = T\hat{A}T^{-1}$ ger: $A^5 = \ldots = \begin{pmatrix} 122 & -121 \\ -121 & 122 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = (\text{produktlag}) = T\hat{A}^{-1}T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$A^{-100} = T\begin{pmatrix} 3^{-100} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T^{-1} \approx T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}T^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(3^{-100})A^{100} = \cdots \approx \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

G.15 $(-1)^n$; $(-1)^{n+1}(a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}) = (-1)^{n+1}$ gånger rötternas summa, respektive $p(0) = \det A =$ rötternas produkt.

G.45 Symmetriska isometrier är: $\pm$ identiteten, vridning 180° samt spegling i plan.

G.46 En lämplig ON-bas får man genom att normera $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$, samt ta kryssprodukten. Kalla denna bas $\underline{\mathbf{e}}$. Då är

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2), \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \qquad \mathbf{f}_3 = \mathbf{e}_3$$

en ON-bas av egenvektorer. Egenvärdena är $|\mathbf{a}|$, $-|\mathbf{a}|$, 0.

F är sammansatt av en ortogonal projektion (utmed $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$), en spegling i $\mathbf{a}$:s och $\mathbf{b}$:s bisektrisplan, samt en sträckning med faktorn $|\mathbf{a}|$.

G.47 a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$, $\mathbf{e}_3$. Egenvärden: 3, 1, 3.

b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)$ Egenvärden: 6, 0, −2.

G.58 a) Inga egenvektorer (F är en konstant gånger vridning 90°).

b) Egenvektorer: Nollskilda vektorer ortogonala mot $\mathbf{c}$ eller parallella med $\mathbf{b}$. Om $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ är ortogonala finns ingen bas av egenvektorer.

G.68 Alg: 3, geom: 2; alg: 2, geom: 1; alg: 3, geom: 1;

G.70

$$\begin{aligned} g(t) &= (\cos t\,\mathbf{u}_0+\sin t\,\mathbf{v})\cdot F(\cos t\,\mathbf{u}_0+\sin t\,\mathbf{v}) \\ &= \cos^2 t\,\mathbf{u}_0\cdot F(\mathbf{u}_0)+\sin^2 t\,\mathbf{v}\cdot F(\mathbf{v})+2\sin t\cos t\,F(\mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{v} \end{aligned}$$

där sista termen bildats ur två termer, genom F:s symmetri. $g'(0)=0$ ger

$$F(\mathbf{u}_0)\cdot\mathbf{v}=0$$

De vektorer $\mathbf{v}$ som är ortogonala mot $\mathbf{u}_0$ bildar ett rum av dimension $= n-1$ (jfr G.III.2) där n är rummets dimension. Med samma resonemang (eller övning E.29–33) visas att de vektorer som är ortogonala mot alla dessa $\mathbf{v}$ bildar ett rum av dimension 1. $\mathbf{u}_0$ och $F(\mathbf{u}_0)$ hör båda till detta rum och är alltså lineärt beroende, d v s $F(\mathbf{u}_0)=\lambda\mathbf{u}_0$ för något λ, VSV.

G.71 a) $Q=X^t\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}X.$

b) Till exempel $\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{f}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_3)$, $\mathbf{f}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1-2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3)$

Egenvärden: 0, 3, 3.

c) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, $F(\mathbf{u})=3y_2\mathbf{f}_2+3y_3\mathbf{f}_3$;

$Q=F(\mathbf{u})\cdot\mathbf{u}=(ey_2\mathbf{f}_2+3y_3\mathbf{f}_3)\cdot(y_1\mathbf{f}_1+y_2\mathbf{f}_2+y_3\mathbf{f}_3)=3y_2^2+3y_3^2.$

d) $Q=X^tAX=(TY)^tATY=Y^t(T^tAT)Y$. Produkten AT innebär att T:s kolonner multipliceras med egenvärdena. Elementen i produkten T^tAT är skalärprodukter (E.II.6.c) av rader i T^t och kolonner i AT. Vi skalärmultiplicerar hela tiden parallella eller ortogonala vektorer. Min egen blygsamma uppfattning är att matrisprodukterna är mycket svårare att se än skalärprodukterna i del a).

e) Q är aldrig negativ men har många nollställen. Dessa är $y_2=y_3=0$, dvs. $\mathbf{u}=y_1\mathbf{f}_1$ = godtyckliga multipler av $\mathbf{f}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1+e_2+\mathbf{e}_3$. De gamla koordinaterna x_1,x_2,x_3 är lika, nämligen $=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\mathbf{y}_1$. Det är lätt att kontrollera att t ex $(x_1,x_2,x_3)=(1,1,1)$ är ett nollställe.

G.75 Med samma bas som jag valde i G.47 och samma ordning på baselementen får vi $Q=$

a) $3y_1^2-3y_2^2-3y_3^2$.   b) $3y_1^2+y_2^2+3y_3^2$.

c) $3y_1^2+9y_2^2+6y_3^2$.   d) $6y_1^2+0y_2^2-2y_3^2$.

G.76 De båda asymptoterna bestämmer fyra kvadranter. För $C = 0$ består kurvan precis av dessa båda linjer. För $C \neq 0$ skär kurvan inte linjerna, ty i en skärning skulle vi få orimligheten $0 = C$.

Asymptoterna bestämmer fyra stycken kvadranter. För positiva C skäres y_1-axeln. Kurvan ligger i de båda kvadranter som innehåller denna axel. För negativa C ligger kurvan i de båda andra kvadranterna.

G.77 a) $3/2$ respektive $1/2$. Nivåkurvorna är ellipser precis som i anmärkningen efter G.VI.2.
b) 2 respektive 0. Obs. att uttrycket är en jämn kvadrat. Nivåkurvorna är par av parallella räta linjer.
c) 5 respektive -5. Nivåkurvorna är hyperbler (övning G76). De båda som ger maximum respektive minimum tangerar cirkeln utvändigt.

G.78 a) 9 respektive -9.
b) $120°$. Enklare lösning: $\mathbf{v} = F(\mathbf{u})$ där F ges av matrisen $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ som beskriver en 120-gradersvridning kring $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ (om man ser detta ...).

G.79 Kanonisk ON-bas till första formen, t ex: $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{18} & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{18} & -2/3 \\ 0 & -4/\sqrt{18} & 1/3 \end{pmatrix}$ (det finns många). I denna får vi ekvationerna $\begin{matrix} 9y_1^2 + 9y_2^2 + 0y_3^2 = 1 \\ 9y_1^2 + 9y_2^2 + 9y_3^2 = 1 \end{matrix}$. Den första ytan är en cylinder med $\mathbf{f}_3$ som symmetriaxel; snitten med planen $y_3 =$ konstant ger ju alla samma cirkel med radie $1/3$. Den andra är en sfär med radie $1/3$. Ytorna tangerar varandra i en cirkel med radie $1/3$ i $\mathbf{f}_3$:s normalplan, alltså en cirkel i normalplanet till $2\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$. Vill vi bara ha *en* punkt kan vi sätta $y_1 = 1/3$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ och sen använda sambandet $X = TY$ (där T är basbytes-matrisen ovan). Vi får raskt $x_1 = x_2 = 1/3\sqrt{2}$, $\quad x_3 = 0$.

G.83 Egenvärden $= 1,5$ ger arean $= \pi/\sqrt{5}$. Ellipsens ekvation i egenbas: $y_1^2 + 5y_2^2 = 1$. Närmsta punkt: $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(-\sqrt{3}/2,\ 1/2)$. Bortersta punkt: $\pm(1/2,\ \sqrt{3}/2)$.

G.85 Uppgiften leder till att minimera $10A^2 + 40AB + 54B^2$ under villkoret $A^2 + B^2 = 1$. Minimum = minsta egenvärdet ≈ 2.27, och antas för $A \approx 0.93$, $B \approx -0.36$.

G.91 Positiv semidefinit.

G.93 a) Positiv definit. b) Indefinit.

G.95 Indefinit.

G.97 a) Indefinit. (obs: *ej* kvadratkompletterad!)
b) Positiv *semi*definit. c) Indefinit.

G.98 $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ ger att a_{12} ej är större än både a_{11} och a_{22}. Motsvarande för godtyckliga i, j.

G.101 a) $A^tAX = \lambda X$ ger $X^tA^tAX = \lambda X^tX$; alltså $\lambda = \dfrac{(AX)\cdot(AX)}{X\cdot X} \geq 0$ (eller: den kvadratiska formen X^tA^tAX är positivt (semi)definit).
b) $A^tAX = \lambda X \quad (1)$ ger $AA^tAX = \lambda AX$, $\quad AA^t(AX) = \lambda(AX) \quad (2)$. Vi måste påpeka att $AX \neq 0$: detta följer av (1) samt att $\lambda \neq 0$ och $X \neq 0$ (vi skulle annars få VL $= 0$, HL$\neq 0$). Detta, tillsammans med (2) visar att AX är egenvektor till AA^t, med egenvärde λ.

G.103 Planet $2x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Det finns många svar. Kommentar, för den som vet något om andragradsytor: Ekvationen $Q = -1$ beskriver en andragradsyta, en enmantlad hyperboloid, som asymptotiskt ansluter till en kon. Plan (genom origo), som endast skär konen i origo, skär hyperboloiden i en ellips, vilket är det efterfrågade fallet. (Plan som tangerar konen skär hyperboloiden i två parallella linjer; Plan som skär konen i två linjer skär hyperboloiden i en hyperbel).

G.124 a) $X(t) = T\begin{pmatrix} e^{15t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix} T^{-1}X(0)$ där $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; $T^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dvs, med $x_1(0) = \alpha_1$, $x_2(0) = \alpha_2$: $\frac{\alpha_1 - 2\alpha_2}{5}e^{15t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{5}e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $s_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s_2 e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ där $s_1 = \frac{1}{4}(3x_1(0) + x_2(0))$ och $s_2 = \frac{1}{4}(x_1(0) - x_2(0))$.

G.125 a) $B = \frac{1}{2}(E + A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

b) $B = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ där $a = \sqrt{3} + 1$, $\quad b = 1 - \sqrt{3}$.

G.126 a) $X(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}e^{-2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + e^{t}\begin{pmatrix} -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Till den allmännare frågan: Partikulärlösningen får samma utseende, e^{at} gånger konstant matris, om $a \neq \pm 2$ dvs. om a är skilt från de båda egenvärdena. I fallen $a = \pm 2$ tillkomer en faktor t. Jfr det skalära fallet, där det väsentliga är om exponenten är karakteristisk rot gånger t. Här byter vi "karakteristisk rot" mot "egenvärde".

b) $x_1 = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$; $\quad x_2 = e^{-2t}\big((B - 2A)\cos t + (-A - 2B)\sin t\big) = dx_1/dt$.

En genväg i just detta exempel hade varit att derivera en ekvation och eliminera!

G.127 a) $A^n\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} + (0.7)^n t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ där $s = a_1 + a_2$ och $t = \frac{1}{3}(a_1 - 2a_2)$.

b) Välj t ex $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad A = T\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}T^{-1} = TDT^{-1}$ Du behöver D^k.

Testa några k, gissa, gör induktion! Svar: $a_k = 2^k + k2^{k-1}$; $b_k = k2^{k-1}$.

G.128 $X(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}e^t + 2(\alpha_1 + \alpha_2)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}te^t$.

G.130 I och med att u denna gång deriveras uppträder frekvensen ω även i högerledet på ett sådant sätt att slutsatserna blir motsatta mot lågpassexemplet. Filtret är ett *högpassfilter*.

G.132 $\begin{pmatrix} 2001 & 2000 \\ -2000 & -1999 \end{pmatrix}$.

G.133 Delföljderna med jämna respektive udda n är var för sig konvergenta. De konvergerar mot varsin lineärkombination av de båda egenvektorerna $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ (egenvärde 1) och $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^t$ (egenvärde -1). Övriga egenvärden är $\pm 1/3$ så bidragen från dessa går mot 0.

G.134 $x_1(t) = e^t\cos t$; $\quad x_2(t) = e^t\sin t$.

G.136 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Eftersom egenvärdena är kubikrötter ur 1 blir förloppet periodiskt, i perioder om tre enheter.