0

S

K.III Teorin På Ett Specerikvitto

K.III.1 Krypa-Gå A.

Teorierna för skalär- och vektorprodukt har en gemensam uppbyggnad som är

a) Produkternas geometriska definitioner (längder och vinklar, inga koordinater).

b) Linearitetsegenskaper :

$$\mathbf{u} * (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} * \mathbf{v}); \quad \mathbf{u} * (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} * \mathbf{v} + \mathbf{u} * \mathbf{w}$$

där $*$ står för $\cdot$ eller $\times$.

c) Basvektorernas produkter bestäms geometriskt (ON-bas)

d) Kombination av b) och c) ger lagarna för komponenträkning.

Linearitetsegenskaperna härleds ur motsvarande egenskaper hos enklare lineära avbildningar. I skalärproduktens fall: ortogonal projektion på linje; i vektorproduktens fall: projektion (i plan), vridning $90°$, sträckning.

I Krypa-Gå särbehandlas homogeniteten. Det bör framgå av början av Kossa C att homogenitet och additivitet kan behandlas enhetligt och samtidigt.

K.III.2 Krypa-Gå Kapitel B.

Determinantteorins uppbyggnad är

a) Definition, summa av tillåtna produkter med tecken.

b) Linearitetsegenskaper (spaltning, utbrytning)

c) Antisymmetri (radbyte ger teckenbyte, två rader lika ger determinant $= 0$)

d) kombination av c) och d) ger att radoperationer inte förändrar determinanten.

e) radoperationer ändrar varken determinant (utom kanske dess tecken) eller lösningsmängd; varur: determinantkriteriet.

Teorin för matrisinvers:

a) $\det A \neq 0$: $AX = E$ lika med n ekvationssystem, alla entydigt lösbara, ger existens av (höger-)invers

b) $\det A = 0$: Elimination i systemen $AX = E$ ger nollrad till vänster, men inte till höger, (höger-)invers existerar ej

c) *högerinvers = vänsterinvers.* Om $AB = E$ så är $X = BA$ och E båda lösningar till den entydigt lösbara ekvationen $AX = A$, och alltså lika.

K.III.3 Kossa B.

Det centrala resultatet är "dimensionens invarians", alla baser har lika många element, sats. B.II.2. Bevisets struktur är att utgå från en bas med visst antal element och visa vad som är fel med mängder med fler element (beroende) eller färre (oberoende).

Båda dessa satser, Satsen Om För Många och Satsen Om För Få, härleds ur lemmat B.II.1: om ett antal element kan uttryckas i färre element (oberoende eller ej kvittar) så är de förra elementen beroende. I botten ligger en sats om homogena ekvationssystem, system med fler obekanta än ekvationer har icke-triviala lösningar (Krypa-Gå B.I.4.)

Förutsättningarna är formulerade så att lemmat ska kunna användas till båda de antydda bevisen. Nackdelen är att logiken inte blir dubbelriktad med ekvivalens i alla led. Den som vill rita en pil låter den gå upp från det homogena ekvationssystemet till den lineära relationen strax innan. Det är också bara den pilen vi behöver eftersom en lösning till systemet stoppas in i relationen. Ekvivalens i alla led gäller bara om mängden M är lineärt oberoende (enligt sats B.I.3.)

Den användbaraste satsen är B.II.5., Satsen Om Rätt Antal Element. Även dess bevis bygger på lemmat: man skaffar med våld en mängd med för många element och löser ut det tillförda (godtyckliga) elementet. Samma resonemang kommer igen i B.III. (Fylla Ut), B.V (planets ekvation) och "P.S. åskådliga Rummet" i Kapitel E.

Vitsen med satsen är att det många gånger är lättare att visa "oberoende" än "spänner upp". Tillämpningarna B.II.8., övn. B11, D.I.5cd (existensbevis genom dimensionsräkning) är typiska.

K.III.4 Kossa C-D

Som kursen ser ut består dessa Kapitel av vardera en enda sats, C.III.1. och D.II.1. Tonvikten ligger på exempel och tillämpningar. Speciellt Kapitel C bör kunna hoppas över i repetitionsfasen.

K.III.5 Kossa E

Det centrala resultatet är "kortaste avstånd = ortogonalt avstånd".

Gram-Schmidt (E.III.3.-4.) säkerställer existensen av ON-baser i euklidiska rum av ändlig dimension. Därmed blir det möjligt att konstruera ortogonala projektioner, enligt E.III.1.-2. Via en komposantuppdelning och Pythagoras' sats (E.IV.1.a) visas att ortogonala avståndet till ett underrum också är det kortaste avståndet. Kateten är kortare än hypotenusan.

Hur komposantuppdelningen ska se ut minns jag aldrig själv utan att rita figuren intill lemma E.IV.

Entydigheten av en ortogonal projektion (E.IV.1.b) kan också visas såhär: Ansätt

$$\mathbf{u}_{\|} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_p \mathbf{e}_p$$

Teckna villkoret att $\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|} \perp \mathbf{e}_i; i = 1, 2, \ldots, p$ dvs. $(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\|} \cdot \mathbf{e}_i = 0$ och koefficienterna blir, entydigt, $\lambda_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i$. (jfr övn. E.5.)

Normalekvationerna (E.IV.3.) är enbart en matrisöversättning av ortogonalitetsvillkor, denna gång mot matrisen A:s kolonner.

K.III.6 Kossa F.

Detta Kapitel har den enklaste strukturen av alla. Först det, sen det. Isometrier i tre dimensioner tas upp i detta sammanhang därför att man får direkt omsättning av teorin. Det är också i så låg dimension som man klarar sig utan egenvärdesteorin . (Den allmänna teorin finns i G.XII. och leder till komplexa egenvärden.)

F.I. . **Bas- och koordinatsamband.** Ömsesidig insättning av sambanden

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}T, \underline{\mathbf{e}} = \underline{\mathbf{f}}U$$

ger $U = T^{-1}$ så att basbytesmatriser är inverterbara.
Det första bassambandet och koordinatframställningen

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{e}}X = \underline{\mathbf{f}}Y$$

ger, återigen genom direkt insättning (samt koordinaternas entydighet), sambandet

$$X = TY;\; Y = T^{-1}X$$

F.II. **Avbildningsmatriser** Kombination av sambanden

$$F(\underline{\mathbf{e}}X_e) = \underline{\mathbf{e}}A_eX_e;\;\; F(\underline{\mathbf{f}}X_f) = \underline{\mathbf{f}}A_fX_f$$

samt nästan vilka bas- eller koordinatsamband som helst ger sambanden

$$A_f = T^{-1}A_eT;\;\; A_e = TA_fT^{-1}$$

Bästa sättet att få kläm på detta är att utföra manipulationerna som övning utan att titta i boken. Många har kunnat rekonstruera beviset ur idéerna, när frågan getts på tentamen.
En viktig tillämpning är att avbildningsmatrisens determinant inte beror på valet av bas, F.II.2. Detta resultat vidgas till att gälla hela sekularpolynomet (inte endast dess konstantterm) i G.IV.

F.III. **ON-baser** $\underline{\mathbf{e}}$, $\underline{\mathbf{f}}$ ON-baser för euklidiskt rum, $\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{e}}P$ ger $P^{-1} = P^t$. Bevisidé: elementen i produkten P^tP (rader gånger kolonner) kan tolkas som skalärprodukterna $\mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j$.

F.IV. **Isometrier.** Den allmänna satsen F.IV.2. beskriver ekvivalens mellan fyra karakteriseringar av isometrier:

a) Matrisegenskapen $P^tP = E$ i ON-bas (ORTO)
b) Längder bevaras (definitionen av isometri) (ISO)
c) Skalärprodukter bevaras (SB)
d) ON-baser bevaras (ONB)

(ORTO) $\Rightarrow$ (ISO) bygger på $|F(\underline{\mathbf{e}}X)|^2 = X^tP^tPX$.

(ISO) $\Rightarrow$ (SB) bygger på "polariseringstricket", som är att sätta in en summa i villkoret (ISO) (dvs. man använder isometriegenskapen på "triangelns tredje sida").

(SB) $\Rightarrow$ (ONB) är trivial

(ONB) $\Rightarrow$ (ORTO) bygger på att matriselementen i P^tP kan tolkas som skalärprodukter av basbilderna.

Isometrier i å.R. finns av två slag: positiva (determinant = +1) som är vridnngar och negativa (determinant = -1) som är vridspeglingar.

Båda karakteriseringarna bygger på existensen av en egenvektor med egenvärde = +1, resp. -1. Det determinanttrick som drar fram cylinderhatten ur kaninen blir begripligt först iochmed övning G.54 som ger uttryck för hela sekularpolynomet för en isometri.

Beviset för det positiva fallet kan föras oberoende av det negativa:

$P^t(P-E) = (E-P)^t$ ger $1 \cdot \det(P-E) = (-1)^3 \det(P-E)$, $\det(P-E) = 0$.

Fortsättningen är att fylla ut egenvektorn till en höger-ON-bas, och utnyttja (ONB) vilket direkt ger matrisen

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & \mp b \\ 0 & b & \pm a \end{pmatrix};\ a^2+b^2=1$$

Tecknen i sista kolonnen bestäms så av att determinanten ska vara oförändrad av basbytet.

Ett geometriskt alternativ ges av övning F.79.

K.III.7 Kossa G. Symmetriska avbildningar

a) Ekvivalenta beskrivningar: $F(\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot F(\mathbf{v})$ eller $A^t = A$ där A är matrisen i ON-bas, G.II.1.-G.II.2. Bevisidén är $F(\underline{\mathbf{e}}X)\cdot\underline{\mathbf{e}}Y = (AX)^tY = X^tA^tY$; $\underline{\mathbf{e}}X\cdot F(\underline{\mathbf{e}}Y) = X^t(AY)$.

b) Sekularekvationens rötter är reella, G.II.7. Ett väsentligt inslag i beviset är att ett komplext egenvärde ger upphov till ett (högst) två-dimensionellt rum, $[\mathbf{u},\mathbf{v}]$, som avbildas in i sig själv av F, på ett speciellt sätt. Resten är manipulationer m h a definitionen av symmetrisk avbildning.

I övn. G.86 antyds ett direkt bevis för Spektralsatsen i 2 dimensioner som kanske ger en tydligare förklaring. Det är värt att notera att man för genomförandet av induktionsbeviset för Spektralsatsen endast behöver bevisa existensen av *ett* reellt egenvärde.

c) Beviset för Spektralsatsen. Induktion över $n = \dim V$. Bilda W = ortogonala komplementet till en egenvektor $\mathbf{e}_0$. W består av alla vektorer i V ortogonala mot $\mathbf{e}_0$. Visa $\dim W = \dim V - 1$. Induktion ger önskad egen-ON-bas för W, tillägg av $\mathbf{e}_0$ ger önskad ON-bas för V.

s

K.IV Stora Avbildningskatalogen.

K.IV.1 2-dimensionella exempel

Många viktiga typer av plana avbildningar kan identifieras direkt på matrisens utseende, utan basbyte. Detta gäller t ex (i ON-bas) för vridning, spegling och ortogonal projektion.

a) *Vridning moturs, vinkeln v* (C.II,VI.):

$$A = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

Matrisen är densamma i alla högerorienterade ON-baser.

b) *Spegling* (C.III., C.VI.):

$$A = \begin{pmatrix} \cos v & \sin v \\ \sin v & -\cos v \end{pmatrix}$$

I detta fall är v lika med dubbla riktningsvinkeln för speglingslinjen och beror alltså på valet av ON-bas. Däremot är basens orientering (höger eller vänster?) likgiltig. Dessa är de båda möjliga isometrierna i planet, se C.VI. Gemensamt, och karakteristiskt för isometrier i godtycklig dimension, är matrisegenskapen $A^tA = E$. Fallen skils åt genom determinantens tecken. Vridning: $+1$, spegling: -1.

c) *Ortogonal projektion* (övn. C.14, bl.a.)

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2 v & \cos v \sin v \\ \cos v \sin v & \sin^2 v \end{pmatrix}$$

Projektionen sker på en linje med riktningsvinkel v. ON-basens orientering är likgiltig. Kännetecknande för projektioner i godtycklig dimension är $A^2 = A$. Ortogonala projektioner känns i ON-bas igen på att $A^t = A$, dvs. symmetrisk matris. Ty en avbildning är symmetrisk om och endast om till den hör en ON-bas av egenvektorer (Spektralsatsen och dess omvändning, G.II.4., G.III.1.)

⋆ d) *Sned projektion.*

$$A = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad & -ac \\ bd & -bc \end{pmatrix}$$

Projektionen sker utmed riktningen $c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$, på linjen genom $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$. Man kan räkna fram matrisen genom basbyte, som i ex. F.II.3. Man kan också lätt kontrollera att den första vektorn avbildas på noll, den andra på sig själv. Här gäller $A^2 = A$ och inget mer. ON-bas förutsätts naturligtvis inte. Med

$$U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$$

gäller

$$A = \frac{1}{U^t V} U V^t$$

e) *Skjuvningar* (övn. C.16, 20a,F.27,30,G.6.):
är det enklaste exemplet på icke diagonaliserbara avbildningar. En skjuvning förskjuter spetsen av en vektor parallellt med en given axel och i proportion till avståndet till axeln. Om dennas riktning väljs som första basvektor erhålles matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K.IV.2 Tredimensionella exempel

a) *Isometrier*
Isometrier känns fortfarande igen på att $A^t A = E$ i ON-bas (F.IV.). Fortfarande finns två fall alltefter determinantens tecken: vridning ($\det A = 1$), vridspegling ($\det A = -1$). Det avgörande steget i klassificeringen är att visa att avbildningen har en egenvektor med egenvärde $+1$ resp. -1
I en höger-ON-bas där en sådan egenvektor ingår fås matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

resp.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix}$$

Vinkeln kan utläsas ur spåret, summan av diagonalelementen, som är samma i alla baser, enligt övn. F77. För en vridning, t ex, ger ovanstående matris att spåret är $1 + 2\cos v$. Mer om axel och vinkel i F.V.
Axeln kan bestämmas, utan fullständigt basbyte med metoden i uppgift F.63. Se även övn. F65 och G112, samt avsnitt F.V.
En ren spegling är en vridspegling $0°$ och känns igen på att matrisen (ovanpå allt annat) är symmetrisk och skild från $-E$. Dessutom är spåret $= 1$ eftersom diagonalelementen i den andra matrisen ovan är $-1, 1, 1$ när $v = 0$. En symmetrisk vridning är en vridning 0 (identiteten) eller $180°$, ty då är $\sin v = -\sin v$ i den första matrisen ovan, eftersom matrisen i godtycklig ON-bas är symmetrisk.
Obs. att matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & \sin v \\ 0 & \sin v & -\cos v \end{pmatrix}$$

är en vridning 180°, vilket framgår av övningarna F.55, F.65 (enklast), F79. och G.45.

b) *Ortogonala projektioner*
känns igen på $P^2 = P$ (G.I.9.) och symmetri (G.II.3.). Alla egenvärden är 0 eller 1. I ON-egenbas fås diagonalmatris med bara nollor eller ettor. Antalet ettor är värderummets dimension och lika med spåret. Så spår =1 svarar mot projektion på linje och spår = 2 svarar mot projektion i ett plan. Denna tolkning av spåret gäller förstås även för sneda projektioner.
Det allmänna uttrycket för ortogonal projektion i matrisen A:s kolonnrum ges i introduktionen till Kapitel E, samt övning E.43, i fallet att A:s kolonner är oberoende (full rang) Matrisen är $P = A(A^tA)^{-1}A^t$. Om A:s kolonner är en ON-mängd, $A^tA = E$, så är tydligen $P = AA^t$, vilket kan ses på många andra sätt.

c) *Antisymmetriska avbildningar*
uppträder bl a i övn. G.51 och Appendix J.VI. Avbildningsegenskapen är $F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{u} \cdot F(\mathbf{v})$ vilket visar sig vara ekvivalent med $F(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$ för alla $\mathbf{u}$. Matrisegenskapen, i ON-bas, är $A^t = -A$. En antisymmetrisk 3/3-matris ser ut såhär

$$A = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

Det är mycket lätt att kontrollera att kryssprodukten

$$F(\mathbf{u}) = \mathbf{u} \times (p\mathbf{e}_1 + q\mathbf{e}_2 + r\mathbf{e}_3) = \mathbf{u} \times \mathbf{a}$$

har denna matris i den givna höger-ON-basen $\underline{\mathbf{e}}$. Om $\mathbf{e}_1$ väljes lika riktad med $\mathbf{a}$ förenklas matrisen till

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s \\ 0 & -s & 0 \end{pmatrix}$$

där s är beloppet av $\mathbf{a}$. Kryssprodukter och antisymmetriska matriser är praktiska att ha till att skriva upp uttryck för vridningar, bl.a. Se t ex övningarna C.65, F.76. och avsnitt F.V.
Den sista matrisen faktoriseras lätt i "de tre stegen" (Krypa-Gå, A.IV.4.)

$$A = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs. (från höger) projektion, vridning 90°, sträckning.
Obs. att detta inte bevisar något eftersom vi förutsatt den linearitet som bevisas med hjälp av De Tre Stegen.